Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Immanuel Halupczok

Sommersemester 2023
26.09.2023

Zweite Klausur zur Linearen Algebra I

Bearbeitungszeit: 2 Stunden

Als Hilfsmittel ist ein beidseitig selbst handbeschriebenes DIN-A4-Blatt erlaubt. Weitere Hilfsmittel wie Skripte, Notizen, Taschenrechner, Telefone oder Bücher sind nicht gestattet. Bitte lassen Sie dergleichen in Ihrer Tasche, und schalten Sie elektronische Geräte aus.

Schreiben Sie bitte leserlich und verwenden Sie keinen Bleistift. Wenn Sie Nebenrechnungen machen, die nicht korrigiert werden sollen, machen Sie dies bitte kenntlich (z. B. indem Sie sie durchstreichen).

Wenn der Platz für die Lösung einer Aufgabe nicht ausreicht, können Sie auch auf dem leeren Papier am Ende des Klausurbogens weiterschreiben; machen Sie dann deutlich, was zu welcher Aufgabe gehört. (Sie können die Rückseiten und das leere Papier natürlich auch als Schmierpapier verwenden.)

Bitte lesen Sie die Aufgaben sorgfältig.

Alle Antworten sind zu begründen (wenn nicht anders angegeben).

Füllen Sie dieses Deckblatt erst auf Aufforderung aus.
Lassen Sie die Klausur bis dahin geschlossen liegen.

Wenn Sie zum Ausfüllen aufgefordert werden: Schreiben Sie bitte DEUTLICH LESBAR in Druckbuchstaben.

Name: ____________________ Vorname: ____________________

Matrikel-Nr: ____________ Studienfach: ____________________ Fachsemester: ______

Hiermit bestätige ich, dass ich zu dieser schriftlichen Prüfung zugelassen bin, da ich

☐ die Zulassung im SS 23 erworben habe

☐ (für Mathematiker inkl. Finanzmathematik:) an einer schriftlichen Prüfung zu lineare Algebra I bei

____________ im WS / SS ______ teilgenommen, aber nicht bestanden habe.

☐ (für andere Fächer:) die Zulassung zur Prüfung im WS / SS ______ erworben habe.

____
Unterschrift

Hiermit bestätige ich, dass ich mich momentan nicht in einem Urlaubssemester befinde und damit berechtigt bin, eine Prüfung abzulegen.

____
Unterschrift

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
Punkte						

Aufgabe 1 (2+3+2 Punkte):

Wir betrachten die Abbildung $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, (a, b) \mapsto 2a + b + 3$.

(i) Ist die Abbildung f injektiv? Ist sie surjektiv?

(ii) Definieren Sie eine Abbildung $g\colon \operatorname{im}(f) \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_{\operatorname{im}(f)}$. Ist eine solche Abbildung g eindeutig?

(iii) Seien nun X und Y beliebige Mengen und $f\colon X \to Y$ eine surjektive Abbildung. Zeigen Sie, dass f genau dann injektiv ist, wenn es genau eine Abbildung $g\colon Y \to X$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ gibt.

Bemerkung: Bei uns ist $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Aufgabe 2 (2+3+2 Punkte):

Wir betrachten die Teilmenge

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}^{\times}, b \in \mathbb{R} \right\}$$

der reellen (2×2)-Matrizen.

(i) Begründen Sie, dass jede Matrix $A \in M$ invertierbar ist.

(ii) Weisen Sie nach, dass M eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ ist.

(iii) Zeigen Sie, dass eine Matrix $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ genau dann in M liegt, wenn Sie jedes Element des Quotienten $\mathbb{R}^2/(\mathbb{R} \times \{0\})$ auf sich selbst abbildet.

Zur Erinnerung: $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ ist die Gruppe der invertierbaren (2×2)-Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{R}$.

Aufgabe 3 (2+3+2 Punkte):

Wir betrachten die Teilmenge $U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x - 2y + z + w = 0\} \subset \mathbb{R}^4$.

(i) Begründen Sie, dass U ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$ ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $((-1, 1, 2, 3), (1, 1, 1, -2), (1, 0, -1, -2)) \in U^3$ eine Basis von U ist.

(iii) Schreiben Sie den Vektor $(0, 0, 1, -1) \in U$ als Linearkombination obiger Basis.

Aufgabe 4 (2+3+2 Punkte):

Wir betrachten die lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x, x + y - z, x - y + z)$.

(i) Bestimmen Sie den Kern von f.

(ii) Finden Sie eine lineare Abbildung $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\mathrm{im}(g) = \ker(f)$ und $g((1, 1, 1)) = (0, 0, 0)$.

(iii) Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und sei $h \in \mathrm{End}(V)$ mit $\ker(h) = \mathrm{im}(h)$. Zeigen Sie, dass $\dim V$ gerade ist. Gibt es, wenn $\dim(V)$ gerade ist, auch stets ein solches h?

Aufgabe 5 (2+3+2 Punkte):

Sei $A \in K^{n \times n}$ eine diagonalisierbare Matrix.

(i) Rechnen Sie nach, dass, wenn $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Diagonaleinträge einer Diagonalform D von A sind, die Determinante von A durch das Produkt $\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$ gegeben ist.

(ii) Zeigen Sie, dass auch die Matrix $A + r \cdot I_n$ für jedes $r \in K$ diagonalisierbar ist.

(iii) Wir betrachten nun die beiden reellen Matrizen

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Begründen Sie, dass B und C diagonalisierbar sind, aber $B + C$ nicht diagonalisierbar ist.