Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Immanuel Halupczok

Sommersemester 2023
26.09.2023

Zweite Klausur zur Linearen Algebra I

Bearbeitungszeit: 2 Stunden

Als Hilfsmittel ist ein beidseitig selbst handbeschriebenes DIN-A4-Blatt erlaubt. Weitere Hilfsmittel wie Skripte, Notizen, Taschenrechner, Telefone oder Bücher sind nicht gestattet. Bitte lassen Sie dergleichen in Ihrer Tasche, und schalten Sie elektronische Geräte aus.

Schreiben Sie bitte leserlich und verwenden Sie keinen Bleistift. Wenn Sie Nebenrechnungen machen, die nicht korrigiert werden sollen, machen Sie dies bitte kenntlich (z. B. indem Sie sie durchstreichen).

Wenn der Platz für die Lösung einer Aufgabe nicht ausreicht, können Sie auch auf dem leeren Papier am Ende des Klausurbogens weiterschreiben; machen Sie dann deutlich, was zu welcher Aufgabe gehört. (Sie können die Rückseiten und das leere Papier natürlich auch als Schmierpapier verwenden.)

Bitte lesen Sie die Aufgaben sorgfältig.

Alle Antworten sind zu begründen (wenn nicht anders angegeben).

Füllen Sie dieses Deckblatt erst auf Aufforderung aus.
Lassen Sie die Klausur bis dahin geschlossen liegen.

Wenn Sie zum Ausfüllen aufgefordert werden: Schreiben Sie bitte DEUTLICH LESBAR in Druckbuchstaben.

Name: ____________________ Vornáme: ____________________

Matrikel-Nr: ____________ Studienfach: ____________ Fachsemester: ______

Hiermit bestätige ich, dass ich zu dieser schriftlichen Prüfung zugelassen bin, da ich

- ☐ die Zulassung im SS 23 erworben habe
- ☐ (für Mathematiker inkl. Finanzmathematik:) an einer schriftlichen Prüfung zu lineare Algebra I bei

  ____________ im WS / SS ______ teilgenommen, aber nicht bestanden habe.
- ☐ (für andere Fächer:) die Zulassung zur Prüfung im WS / SS ______ erworben habe.

____
Unterschrift

Hiermit bestätige ich, dass ich mich momentan nicht in einem Urlaubssemester befinde und damit berechtigt bin, eine Prüfung abzulegen.

____
Unterschrift

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
Punkte						

Aufgabe 1 (2+3+2 Punkte):

Wir betrachten die Abbildung $f\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}, (a,b)\mapsto 2a+b+3$.

(i) Ist die Abbildung f injektiv? Ist sie surjektiv?

(ii) Definieren Sie eine Abbildung $g\colon \operatorname{im}(f)\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ mit $f\circ g=\mathrm{id}_{\operatorname{im}(f)}$. Ist eine solche Abbildung g eindeutig?

(iii) Seien nun X und Y beliebige Mengen und $f\colon X\to Y$ eine surjektive Abbildung. Zeigen Sie, dass f genau dann injektiv ist, wenn es genau eine Abbildung $g\colon Y\to X$ mit $f\circ g=\mathrm{id}_Y$ gibt.

Bemerkung: Bei uns ist $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,\dots\}$.

(i)

f ist nicht injektiv, da zB. $f((1,0)) = 5 = f((0,2))$.

f ist auch nicht surjektiv, da $\underbrace{2a}_{\geq 0} + \underbrace{b}_{\geq 0} + \underbrace{3}_{\geq 3} \geq 3$ ist. Also ist zB. $0 \notin im(f)$.

(ii)

n hat $(0, n-3)$ als Urbild

Zu jedem $n \in im(f) = \mathbb{N}_{\geq 3}$ wählen wir ein Urbild (a_n, b_n) unter f.
Nun betrachten wir $g: im(f) \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $n \mapsto (a_n, b_n)$. Es ist nun

$$f \circ g(n) = f(a_n, b_n) \overset{\text{nach Wahl}}{\underset{\text{von } (a_n,b_n)}{=}} n$$

für alle $n \in im(f)$, sodass $f \circ g = id_{im(f)}$.

Eine solche Abbildung g ist nicht eindeutig, da wir, wie in (i) bereits gesehen, mindestens ein Element mit mehr als einem Urbild unter f haben. Somit liefert obige Definition von g bereits mehrere solche Abbildungen.

(iii)

Ist f injektiv, so also bijektiv und es existiert die Umkehrabbildung f^{-1} von f. Diese erfüllt $f \circ f^{-1} = id_Y$. Ist $g: Y \to X$ eine beliebige Abbildung mit $f \circ g = id_Y$, so erhalten wir $g = f^{-1}$ vermöge der Verkettung mit f^{-1}.

Angenommen, f sei nicht injektiv. Dann hat mindestens ein Element $y_0 \in Y$ mehr als ein Urbild. Somit können wir wie in (ii) zu jedem $y \in Y$ ein Urbild wählen und damit eine Abbildung $g: Y \to X$ mit $f \circ g = id_Y$ konstruieren. Da wir für y_0 mehr als eine Wahl haben, erhalten wir nun auch mehrere solcher Abbildungen g.

Aufgabe 2 (2+3+2 Punkte):

Wir betrachten die Teilmenge

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}^\times, b \in \mathbb{R} \right\}$$

der reellen (2×2)-Matrizen.

(i) Begründen Sie, dass jede Matrix $A \in M$ invertierbar ist.

(ii) Weisen Sie nach, dass M eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ ist.

(iii) Zeigen Sie, dass eine Matrix $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ genau dann in M liegt, wenn Sie jedes Element des Quotienten $\mathbb{R}^2/(\mathbb{R} \times \{0\})$ auf sich selbst abbildet.

Zur Erinnerung: $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ ist die Gruppe der invertierbaren (2×2)-Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{R}$.

(i)

Für eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M$ ist $\det(A) = a \overset{A \in M}{\neq} 0$. Also ist A invertierbar.

(ii)

Nach (i) ist M eine Teilmenge von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Zudem haben wir

- $I_2 \in M$ indem wir $a = 1$ und $b = 0$ wählen
- $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & ab'+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ für alle $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M$. Da $\mathbb{R}^\times$ und $\mathbb{R}$ Gruppen sind, liegt somit auch obiges Produkt wieder in M.
- für eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M$, dass auch A^{-1} in M liegt:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a^{-1} & -ba^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\in M}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^{-1} & -ba^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Also ist M eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

(iii)

Ist $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M$, so ist

$$A\overline{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\overline{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \overline{\begin{pmatrix} ax + by \\ y \end{pmatrix}} = \overline{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} + \overline{\begin{pmatrix} (a-1)x + by \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$= \overline{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

für alle Vektoren $\overline{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} \in \mathbb{R}^2/(\mathbb{R} \times \{0\})$.

Sei nun $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Gl_2(\mathbb{R})$ mit $A\overline{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \overline{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$ für alle $\overline{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} \in \mathbb{R}^2/(\mathbb{R}\times\{0\})$. Dann erhalten wir

$$\overline{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = A\overline{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \overline{\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}} \quad \text{und} \quad \overline{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = A\overline{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = \overline{\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}}$$

und somit $c = 0$ und $d = 1$. Also ist $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und nach Annahme ist $A \in Gl_2(\mathbb{R})$. Daher ist $\det(A) = a \neq 0$ und daher $A \in M$.

Aufgabe 3 (2+3+2 Punkte):

Wir betrachten die Teilmenge $U = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x - 2y + z + w = 0\} \subset \mathbb{R}^4$.

(i) Begründen Sie, dass U ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$ ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $((-1,1,2,3),(1,1,1,-2),(1,0,-1,-2)) \in U^3$ eine Basis von U ist.

(iii) Schreiben Sie den Vektor $(0,0,1,-1) \in U$ als Linearkombination obiger Basis.

(i)

Zunächst einmal ist $U \neq \emptyset$, da z.B. $(0,0,1,-1) \in U$. Sind nun $(x,y,z,w), (x',y',z',w') \in U$ und ist $\lambda \in \mathbb{R}$, so ist

$$\lambda(x,y,z,w) + (x',y',z',w') = (\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z', \lambda w + w') \in U, \text{ da}$$

$$3(\lambda x + x') - 2(\lambda y + y') + \lambda z + z' + \lambda w + w' = \lambda \underbrace{(3x - 2y + z + w)}_{\substack{=0, \text{ da} \\ (x,y,z,w) \in U}} + \underbrace{(3x' - 2y' + z' + w')}_{\substack{=0, \text{ da} \\ (x',y',z',w') \in U}} = 0$$

Also ist U ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$.

(ii)

Da z.B. $(1,0,0,0) \notin U$, ist $U \neq \mathbb{R}^4$, sodass $\dim(U) \leq 3$ sein muss. Somit genügt es zu zeigen, dass $((-1,1,2,3),(1,1,1,-2),(1,0,-1,-2)) \in U^3$ linear unabhängig ist, da es dann bereits maximal linear unabhängig und somit eine Basis sein muss. Wir verwenden nun den Gauß-Algorythmus:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{III + 2I \\ IV + 3I}]{II + I} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[III - 3IV]{II - 2IV} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{Zeilenver-} \\ \text{tauschungen}}]{III - 2II} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also ist obiges Tupel linear unabhängig und somit wie bereits erklärt eine Basis von U.

(iii)

Wir verwenden erneut den Gauß-Algorythmus, wobei wir nur noch obige Zeilenoperationen auf $(0,0,1,-1)$ anwenden müssen:

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix} \overset{\text{s.o.}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix} \overset{\text{s.o.}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}0\\2\\4\\-1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}0\\-1\\2\\0\end{pmatrix}$$

Wir haben also

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & -1 \end{array}\right) \overset{\text{s.o.}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ist also $\lambda(-1,1,2,3) + \mu(1,1,1,-2) + \rho(1,0,-1,-2) = (0,0,1,-1)$, für $\lambda, \mu, \rho \in \mathbb{R}$, so erhalten wir nun

- $-\rho = 2$, also $\rho = -2$
- $\mu + \underbrace{\rho}_{=-2} = -1$, also $\mu = 1$
- $-\lambda + \underbrace{\mu}_{=1} + \underbrace{\rho}_{=-2} = 0$, also $\lambda = -1$

Somit $-(-1,1,2,3) + (1,1,1,-2) - 2(1,0,-1,-2) = (0,0,1,-1)$.

Aufgabe 4 (2+3+2 Punkte):

Wir betrachten die lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x, x+y-z, x-y+z)$.

(i) Bestimmen Sie den Kern von f.

(ii) Finden Sie eine lineare Abbildung $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\operatorname{im}(g) = \ker(f)$ und $g((1,1,1)) = (0,0,0)$.

(iii) Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und sei $h \in \operatorname{End}(V)$ mit $\ker(h) = \operatorname{im}(h)$. Zeigen Sie, dass $\dim V$ gerade ist. Gibt es, wenn $\dim(V)$ gerade ist, auch stets ein solches h?

(i)

Es ist

$$\ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} x \\ x+y-z \\ x-y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ y \end{pmatrix} \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

1. Zeile $x = 0$

2./3. Zeile dann $y = z$

(ii)

Zunächst einmal ist $((1,1,1), (0,1,0), (0,1,0)) \in \mathbb{R}^3$ offenbar linear unabhängig und somit wegen $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ eine Basis. Nun definieren wir g auf dieser Basis durch

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist offenbar $g\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nach Konstruktion. Ist nun $v \in \mathbb{R}^3$, so schreibe $v = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\lambda, \mu, \rho \in \mathbb{R}$. Wir erhalten

$$g(v) = g\left(\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \overset{\text{lin.}}{=} \lambda \underbrace{g\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}_{= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} + \mu \underbrace{g\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}_{= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} + \rho \underbrace{g\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}_{= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

sodass $\operatorname{im}(g) = \ker(f)$.

(iii)

Der Rangsatz liefert

$$\dim(V) = \dim(\ker(h)) + \dim(\operatorname{im}(h)) = 2 \dim(\ker(h)),$$

sodass $\dim(V)$ gerade ist.

Ist $\dim(V) = 2n$ gerade, so wählen wir eine Basis $(v_1, \dots, v_{2n}) \in V^{2n}$ von V. Nun definieren wir h vermöge dieser Basis:

$$v_i \mapsto \begin{cases} v_{i+n}, & \text{falls } 1 \le i \le n \\ 0_V, & \text{falls } n+1 \le i \le 2n \end{cases}$$

Dann ist $\ker(h) = \langle v_{n+1}, \dots, v_{2n} \rangle = \operatorname{im}(h)$. Ein solches h gibt es demnach stets, wenn $\dim(V)$ gerade ist.

Aufgabe 5 (2+3+2 Punkte):

Sei $A \in K^{n\times n}$ eine diagonalisierbare Matrix.

(i) Rechnen Sie nach, dass, wenn $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Diagonaleinträge einer Diagonalform D von A sind, die Determinante von A durch das Produkt $\lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n$ gegeben ist.

(ii) Zeigen Sie, dass auch die Matrix $A + r \cdot I_n$ für jedes $r \in K$ diagonalisierbar ist.

(iii) Wir betrachten nun die beiden reellen Matrizen

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Begründen Sie, dass B und C diagonalisierbar sind, aber $B + C$ nicht diagonalisierbar ist.

(i)

Es ex. eine Matrix $S \in Gl_n(K)$ mit $S^{-1}AS = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$. Somit erhalten wir

$$\det(A) = \det(A) \cdot \det(S)^{-1}\det(S) = \det(A)\det(S^{-1})\det(S)$$
$$= \det(S^{-1})\det(A)\det(S)$$
$$= \det(S^{-1}AS)$$
$$= \det(D)$$
$$= \det\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$
$$= \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n$$

(ii)

Wir betrachten erneut obige Matrix S. Nun ist

$$S^{-1}(A + r \cdot I_n)S = S^{-1}AS + S^{-1}(r \cdot I_n)S = D + \underbrace{S^{-1}S}_{= I_n} \cdot (r \cdot I_n)$$
$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 + r & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n + r \end{pmatrix},$$

sodass $A + r \cdot I_n$ für alle $r \in \mathbb{R}$ diagonalisierbar ist.

(iii)

Die Matrix C ist bereits in Diagonalform und somit offenbar diagonalisierbar. Für die Matrix B bestimmen wir das char. Polynom:

$$\chi_B(T) = \det\left(\begin{pmatrix} T-2 & -1 \\ 0 & T-1 \end{pmatrix}\right) = (T-\underset{\sim}{2})(T-\underset{\sim}{1})$$

Eigenwerte von B

Nun schauen wir uns die Eigenvektoren zu den jeweiligen Eigenwerten an:

$$\ker\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \underbrace{\begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\ker\left(\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \underbrace{\begin{pmatrix} -x-y \\ 0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Da $\mathbb{R}^2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, ist B diagonalisierbar.

Für $B + C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ergibt sich:

$$\chi_{B+C}(T) \underset{\text{oben}}{\overset{\text{wie}}{=}} (T-\underset{\sim}{1})^2$$

Eigenwert von $B+C$

$$\ker\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{pmatrix} -y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Somit existiert keine Basis von $\mathbb{R}^2$ aus Eigenvektoren von $B+C$, sodass $B+C$ nicht diagonalisierbar ist.