**Aufgabe 1 (2+3+2 Punkte):**

Wir betrachten die Menge $X = \mathrm{Abb}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ aller Abbildungen von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}$.

(i) Zeigen Sie, dass die Relation $f \sim g \iff f(5) = g(5)$ auf der Menge $X$ eine Äquivalenzrelation ist.

(ii) Wir ersetzen nun die definierende Eigenschaft $f(5) = g(5)$ von $\sim$ durch $f(5) = g(3)$. Welche der Axiome einer Äquivalenzrelation gelten dann noch?

(iii) Wir nehmen nun an, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $X$ ist, für welche $f \sim g$ ist für alle $f, g \in X$ mit $f(5) = g(3)$. Zeigen Sie, dass die konstante Abbildung mit Wert 34 und die konstante Abbildung mit Wert 42 in Relation zueinander stehen.

(i)

„Reflexivität": Sei $f \in X$. Offenbar ist $f(5) = f(5)$ und somit $f \sim f$.

„Symmetrie": Seien $f, g \in X$ mit $f \sim g$, d.h. es ist $f(5) = g(5)$. Dann haben wir auch $g(5) = f(5)$, sodass $g \sim f$.

„Transitivität": Seien $f, g, h \in X$ mit $f \sim g$ und $g \sim h$, d.h. wir haben $f(5) = g(5)$ und $g(5) = h(5)$. Dann ist also $f(5) = g(5) = h(5)$ und wir erhalten $f \sim h$.

Also ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $X$.

(ii)

Keine:

„Reflexivität": Die Abbildung $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ a \mapsto \begin{cases} 0, & a = 5 \\ 1, & a \neq 5. \end{cases}$ erfüllt $f(5) = 0 \neq 1 = f(3)$, sodass $f \not\sim f$.

„Symmetrie": Betrachten nun obiges $f$ und $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ a \mapsto \begin{cases} 0, & a = 3 \\ 2, & a \neq 3. \end{cases}$ Dann ist $f(5) = 0 = g(3)$, sodass $f \sim g$, aber $g(5) = 2 \neq 1 = f(3)$, sodass $g \not\sim f$.

„Transitivität": Betrachten nun obige $f, g$ und $h: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ a \mapsto \begin{cases} 2, & a = 3 \\ 0, & a \neq 3. \end{cases}$ Dann ist $g(5) = 2 = h(3)$, sodass $g \sim h$. Wir haben also $f \sim g$ und $g \sim h$. Jedoch ist $f(5) = 0 \neq 2 = h(3)$, sodass $f \not\sim h$.

(iii)

Schreibe $c_{34}$ und $c_{42}$ für die jeweiligen konstanten Abbildungen. Betrachte nun $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ a \mapsto \begin{cases} 34, & a = 3 \\ 42, & a \neq 3. \end{cases}$ Dann ist $c_{34}(5) = 34 = f(3)$, sodass $c_{34} \sim f$. Es ist aber auch $f(5) = 42 = c_{42}(3)$, sodass $f \sim c_{42}$. Somit $c_{34} \sim c_{42}$ aufgrund der Transitivität.

**Aufgabe 2 (2+3+2 Punkte):**

Sei $R$ ein (im Allgemeinen nicht-kommutativer) Ring. Wir nennen ein Element $a \in R$ idempotent, falls $a^2 = a$ ist.

(i) Sei $a \in R$ idempotent. Rechnen Sie nach, dass auch $b = 1-a$ idempotent ist und $a$ und $b$ miteinander kommutieren, d.h., dass $ab = ba$ ist.

(ii) Seien nun $a, b \in R$ so, dass $a$, $b$ und $a+b$ idempotent sind. Zeigen Sie, dass $a$ und $b$ dann bereits miteinander kommutieren.
**Hinweis:** Zeigen Sie zunächst, dass $ab = -ba$ ist. Was passiert nun, wenn man von links und/oder rechts mit $a$ und/oder $b$ multipliziert?

(iii) Sei nun $R = K[x]$ der Polynomring über einem Körper $K$ in einer Variablen $x$. Zeigen Sie, dass die einzigen idempotenten Elemente von $R$ durch 0 und 1 gegeben sind.

(i)

$$b^2 = (1-a)^2 \overset{1 \text{ kommutiert mit allem}}{=} 1 - 2a + \underbrace{a^2}_{=a} = 1 - a = b$$

$$ab = a(1-a) = a - \underbrace{a^2}_{=a} = 0 \overset{\text{genauso, da 1 mit allem kommutiert}}{=} ba$$

(ii)

$$a+b = (a+b)^2 = \underbrace{a^2}_{=a} + ab + ba + \underbrace{b^2}_{=b} = a + b + ab + ba,$$

sodass $ab = -ba$ sein muss. Multiplikation mit $a$ von links liefert

$$ab \overset{a^2=a}{=} a(ab) = a(-ba) \overset{-1 \text{ kommutiert mit allem}}{=} -aba \overset{ab=-ba}{=} -(-ba)a = ba^2 \overset{a^2=a}{=} ba$$

(iii)

Offenbar sind $0, 1 \in R$ idempotent. Sei nun $f \in R[x]$ idempotent. Dann ist $2\deg(f) = \deg(f^2) = \deg(f)$, sodass $\deg(f) = 0$ sein muss. Wir haben also $f = a$ für ein $a \in K \setminus \{0\}$. Da $a = f = f^2 = a^2$, erhalten wir nach Multiplikation mit $a^{-1}$ (ex., da $K$ Körper und $a \neq 0$) die Gleichung $1 = a$.

**Aufgabe 3 (2+3+2 Punkte):**
Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$ und die drei Vektoren

$$v_1 = (1, 2, 1),\ v_2 = (-1, -1, 1),\ v_3 = (2, 2, -2) \in V.$$

(i) Ist $v_4 = (1, -1, -5) \in \langle v_1, v_2, v_3 \rangle_{\mathbb{R}}$?

(ii) Welche der Vektoren $v_1$, $v_2$ oder $v_3$ kann man weglassen, ohne dass sich das Erzeugnis $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle_{\mathbb{R}}$ ändert? Welche der Vektoren $v_1$, $v_2$ oder $v_4$ kann man bei dem Erzeugnis $\langle v_1, v_2, v_4 \rangle_{\mathbb{R}}$ weglassen, ohne dass sich das Erzeugnis ändert?

(iii) Gibt es Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in V$ so, dass $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle_{\mathbb{R}}$ eine echte Teilmenge von $\mathbb{R}^3$ ist und außerdem $\langle v_1, v_2 \rangle_{\mathbb{R}}$, $\langle v_2, v_3 \rangle_{\mathbb{R}}$ und $\langle v_1, v_3 \rangle_{\mathbb{R}}$ alle drei echte Teilmengen von $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle_{\mathbb{R}}$ sind?

(i)

Wir betrachten das zugehörige Gleichungssystem und wenden den Gauß-Algorithmus an:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III}-\text{I}]{\text{II}-2\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & -4 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III}-2\text{II}} \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} \tilde{x} & \tilde{y} & \tilde{z} & \phantom{0} \end{array} \end{array}$$

Somit können wir $z = 0$ wählen und erhalten

[redacted]

$y = -3$

und

$x - y = 1$, d.h. $x = -2$.

Haben also $-2v_1 - 3v_2 = v_4$.

(ii)

Da $v_3 = -2v_2$, kann man stets einen dieser beiden Vektoren weglassen. Den Vektor $v_1$ kann man nicht weglassen, denn $\langle v_2, v_3 \rangle_{\mathbb{R}} = \langle v_2 \rangle_{\mathbb{R}}$ enthält nur Vektoren, deren Einträge betraglich gleich sind. Somit ist z.B. $v_1 \notin \langle v_2 \rangle_{\mathbb{R}}$.

Bei $\langle v_1, v_2, v_4 \rangle_{\mathbb{R}}$ kann man jeden weglassen:

- $v_4 \overset{(i)}{=} -2v_1 - 3v_2 \in \langle v_1, v_2 \rangle_{\mathbb{R}}$
  $v_2 \overset{(i)}{=} -\frac{2}{3}v_1 - \frac{1}{3}v_4 \in \langle v_1, v_4 \rangle_{\mathbb{R}}$
  $v_1 \overset{(i)}{=} -\frac{3}{2}v_2 - \frac{1}{2}v_4 \in \langle v_2, v_4 \rangle_{\mathbb{R}}$

(iii)

Ist $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle_{\mathbb{R}} \subsetneq \mathbb{R}^3$, so muss $\dim(\langle v_1, v_2, v_3 \rangle_{\mathbb{R}}) \leq 2$ sein. [redacted]. Somit kann einer der drei Vektoren $v_1, v_2$ oder $v_3$ [redacted] weggelassen werden. O.E. sei dies $v_3$.

Dann ist aber $\langle v_1, v_2 \rangle_{\mathbb{R}} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle_{\mathbb{R}}$ keine echte Inklusion.

**Aufgabe 4 (2+3+2 Punkte):**

Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}^3$ und die beiden Untervektorräume

$$U = \{(x, 2x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\} \quad \text{und} \quad U' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}.$$

(i) Bestimmen Sie die Dimension von $U \cap U'$.

(ii) Finden Sie eine lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, sodass $f((x, 2x, 3x)) = (2x, -2x, 0)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist und außerdem $f(v) = 2v$ für alle $v \in U'$ ist.

(iii) Sei nun $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung mit $g(U') = U$. Welchen Rang kann $g$ haben?

(i)

Ist $v \in U \cap U'$, so ex. ein $x \in \mathbb{R}$ mit $v = (x, 2x, 3x)$ und es ist $6x = x + 2x + 3x = 0$. Somit ist $x = 0$ und daher auch $v = 0$. Wir haben also $U \cap U' = \{0\}$ und [redacted] somit

$\dim(U \cap U') = 0$

(ii)

Eine Basis von $U'$ ist durch $(\underbrace{(1,0,-1)}_{\in U'}, \underbrace{(0,1,-1)}_{\in U'})$ gegeben, da diese beiden Vektoren offenbar linear unabhängig sind und $\dim(U') \leq 2$ ist aufgrund von $(1,1,1) \notin U'$. Da $U \cap U' = \{0\}$,

da $3 \neq 0$

ist daher $((1,2,3), (1,0,-1), (0,1,-1))$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$. Wir definieren nun eine lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vermöge dieser Basis:

$(1,2,3) \mapsto (2,-2,0)$

$(1,0,-1) \mapsto 2(1,0,-1)$

$(0,1,-1) \mapsto 2(0,1,-1)$

Dann ist

$f((x, 2x, 3x)) = f(x(1,2,3)) = x f((1,2,3)) = x(2,-2,0) = (2x, -2x, 0)$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Ist nun $v \in U'$, so schreiben wir $v = \lambda(1,0,-1) + \mu(0,1,-1)$

[redacted] mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und erhalten

$(1,0,-1), (0,1,-1)$ ist Basis von $U'$

$$f(v) = f(\lambda(1,0,-1) + \mu(0,1,-1)) = \lambda f((1,0,-1)) + \mu f((0,1,-1))$$
$$= \lambda \cdot 2(1,0,-1) + \mu \cdot 2(0,1,-1)$$
$$= 2(\lambda(1,0,-1) + \mu(0,1,-1))$$
$$= 2v.$$

(iii)

Ein solches $g$ kann Rang 1 oder 2 haben.

$rk(g) \geq 1$: $U$ ist 1-dimensional und $U \subset im(g)$

$rk(g) \leq 2$: Schränken wir $g$ auf eine Basis ein, so können wir den Rang von $g$ anhand der linear unabhängigen Bilder der Basisvektoren bestimmen. Da $U'$ 2-dimensional ist, werden hier 2 Basisvektoren (z.B. die aus Teil (ii)) auf zwei linear abhängige Vektoren abgebildet, da $U$ 1-dimensional ist. Somit ist $rk(g) < dim(\mathbb{R}^3) = 3$

Beide Fälle treten auf:

$rk(g) = 1$: Definiere $g$ vermöge der Basis aus Teil (ii):

$$(1,2,3) \mapsto (1,2,3)$$
$$(1,0,-1) \mapsto (1,2,3)$$
$$(0,1,-1) \mapsto (1,2,3)$$

Dann ist $im(g) = U$ 1-dimensional.

$rk(g) = 2$: Definiere $g$ wie folgt:

$$(1,2,3) \mapsto (1,1,1) \notin U$$
$$(1,0,-1) \mapsto (1,2,3)$$
$$(0,1,-1) \mapsto (1,2,3)$$

Dann ist $im(g) = \langle (1,1,1), (1,2,3) \rangle_{\mathbb{R}}$ 2-dimensional.

**Aufgabe 5 (2+3+2 Punkte):**

(i) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -t & t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$.

(ii) Für welche Werte $t$ ist die Matrix $A_t$ invertierbar?

(iii) Bestimmen Sie das Inverse von $A_1$.

(i)

$$\det(A_t) = \det\begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -t & t \end{pmatrix} \overset{(3\times 3)-}{\underset{\text{Formel}}{=}} 4t - 2t - t - 2t^2 = t - 2t^2$$

(ii)

$A_t$ ist gd. invertierbar, wenn $\det(A_t) \neq 0$ ist. Letzteres ist genau dann der Fall, wenn $t \in \mathbb{R}\setminus\{0, \frac{1}{2}\}$ ist, da $t - 2t^2 = t(1-2t)$ die Nullstellen $0$ und $\frac{1}{2}$ hat.

(iii)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II}-2\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II}+2\text{III}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III}+\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{I}+(\text{II}+\text{III})}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III}\cdot(-1)]{\text{II}\cdot(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II}\leftrightarrow\text{III}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}}_{= A_1^{-1}}$$