Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Immanuel Halupczok

Sommersemester 2023

Probeklausur zur Linearen Algebra I

Diese Probeklausur sollte vom Umfang und von der Art der Aufgaben etwa den eigentlichen Klausuren entsprechen; garantieren können wir dafür natürlich nicht. Die Aufgaben decken auch nicht unbedingt alle Bereiche ab; sonst wäre es für eine Klausur zu umfangreich geworden.

Aufgabe 1 (2+3+2 Punkte):

Seien X und Y endliche Mengen und sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung.

(i) Zeigen Sie, dass $A \subset f^{-1}(f(A))$ für jede Teilmenge $A \subseteq X$ ist.

(ii) Geben Sie ein Beispiel dafür an, dass die Inklusion $A \subset f^{-1}(f(A))$ im Allgemeinen keine Gleichheit ist. Geben Sie zudem ein Beispiel dafür an, dass diese Inklusion eine Gleichheit sein kann.

(iii) Zeigen Sie, dass die Abbildung f genau dann injektiv ist, wenn für jede Teilmenge $A \subset X$ die Gleichheit $f^{-1}(f(A)) = A$ gilt.

Aufgabe 2 (2+3+2 Punkte):

Wir betrachten die Quotientengruppe $G = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

(i) Geben Sie einen Repräsentanten des Elementes $\overline{3/4} + \overline{5/3} \in G$ zwischen 0 und 1 an.

(ii) Bestimmen Sie alle Elemente $g \in G$ mit $3g = \overline{0}$.

(iii) Zeigen Sie, dass zu jedem $g \in G$ eine natürliche Zahl $n \geq 1$ mit $ng = \overline{0}$ existiert.

Aufgabe 3 (2+3+2 Punkte):

(i) Weisen Sie nach, dass das Tupel $((1,1,2),(1,2,3)) \in (\mathbb{R}^3)^2$ linear unabhängig ist.

(ii) Finden Sie eine lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $\ker(f) = \langle (1,1,2),(1,2,3) \rangle_{\mathbb{R}}$

(iii) Sei nun $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ eine beliebige lineare Abbildung mit $\ker(g) = \langle (1,1,2),(1,2,3) \rangle_{\mathbb{R}}$. Zeigen Sie, dass das Tupel $(g((1,0,0)), g((0,0,1))) \in (\mathbb{R}^2)^2$ linear abhängig ist.

Aufgabe 4 (2+3+2 Punkte):

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix, die in jeder Spalte genau eine 1 und sonst nur 0en besitzt.

(i) Was kann der Rang einer solchen Matrix sein?

(ii) Was kann die Determinante von A sein?

(iii) Wir nehmen nun zusätzlich an, dass $\operatorname{rk}(A) = n$ ist. Begründen Sie, dass auch A^{-1} in jeder Spalte genau eine 1 und sonst nur 0en besitzt und geben Sie zudem an, in welchen Zeilen sich die 1en befinden.

Aufgabe 5 (2+3+2 Punkte):

(i) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(ii) Geben Sie zu jedem Eigenwert von A einen zugehörigen Eigenvektor an.

(iii) Ist die Matrix A diagonalisierbar? Falls ja, geben eine Diagonalform D von A an.