Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Immanuel Halupczok

Sommersemester 2023

Probeklausur zur Linearen Algebra I

Diese Probeklausur sollte vom Umfang und von der Art der Aufgaben etwa den eigentlichen Klausuren entsprechen; garantieren können wir dafür natürlich nicht. Die Aufgaben decken auch nicht unbedingt alle Bereiche ab; sonst wäre es für eine Klausur zu umfangreich geworden.

Lösungsvorschlag:

⚠ Wichtig:

Wir erwarten nicht, dass Sie in der begrenzten Klausurzeit alles so ausführlich und formal aufschreiben, wie hier. Als Bspl.:

Aufg. 1 (iii) „⇐" wäre auch wie folgt von uns akzeptiert worden:

$f^{-1}(f(\{x\})) = \{x\} \ \forall x \in X \rightsquigarrow$ jedes $f(x)$ hat genau ein Urbild

$\rightsquigarrow f$ injektiv.

Aufg. 4 (iii) wäre auch wie folgt okay:

A entsteht aus 1_n durch Zeilenvertauschungen, da $rk(A) = n$. Somit erhalten wir A^{-1} aus 1_n, indem wir obige Vertauschungen rückgängig machen. Können so anhand der Positionen der 1en in A auch die in A^{-1} bestimmen.

Aufgabe 1 (2+3+2 Punkte):

Seien X und Y endliche Mengen und sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung.

(i) Zeigen Sie, dass $A \subset f^{-1}(f(A))$ für jede Teilmenge $A \subseteq X$ ist.

(ii) Geben Sie ein Beispiel dafür an, dass die Inklusion $A \subset f^{-1}(f(A))$ im Allgemeinen keine Gleichheit ist. Geben Sie zudem ein Beispiel dafür an, dass diese Inklusion eine Gleichheit sein kann.

(iii) Zeigen Sie, dass die Abbildung f genau dann injektiv ist, wenn für jede Teilmenge $A \subset X$ die Gleichheit $f^{-1}(f(A)) = A$ gilt.

(i) Es ist

$$f^{-1}(f(A)) = \{x \in X \mid f(x) \in f(A)\}$$

$$= \{x \in X \mid \text{ex. } a \in A \text{ mit } f(a) = f(x)\}$$

$\cup$ $f(a) = f(a)$ stets erfüllt

A

für alle Teilmengen $A \subset X$.

(ii) Wir betrachten

$f\colon \{0,1,2\} \to \{3,4\}$ gegeben durch $0 \mapsto 3$, $1 \mapsto 3$ und $2 \mapsto 4$.

Für $A = \{0\}$ ist dann $f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(\{3\}) = \{0,1\} \supsetneq \{0\} = A$

und

für $A' = \{2\}$ ist dann $f^{-1}(f(A')) = f^{-1}(\{4\}) = \{2\} = A'$

(iii)

„$\Rightarrow$": Ist f injektiv, so hat jedes Element aus $f(A)$ für eine Teilmenge $A \subset X$ genau ein Urbild. Somit ist stets $f^{-1}(f(A)) = A$, denn für obige $x \in X$ kommt immer nur das Element a selbst infrage.

„$\Leftarrow$": Wir haben, dass $f^{-1}(f(\{x\})) = \{x\}$ für jede ein-elementige Teilmenge $\{x\} \subset X$ ist. Insbesondere hat jedes Element aus dem Bild $f(X)$ also genau ein Urbild. Somit ist f injektiv.

Aufgabe 2 (2+3+2 Punkte):

Wir betrachten die Quotientengruppe $G = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

(i) Geben Sie einen Repräsentanten des Elementes $\overline{3/4} + \overline{5/3} \in G$ zwischen 0 und 1 an.

(ii) Bestimmen Sie alle Elemente $g \in G$ mit $3g = \overline{0}$.

(iii) Zeigen Sie, dass zu jedem $g \in G$ eine natürliche Zahl $n \geq 1$ mit $ng = \overline{0}$ existiert.

(i)

$$\overline{\tfrac{3}{4}} + \overline{\tfrac{5}{3}} = \overline{\tfrac{3}{4} + \tfrac{5}{3}} = \overline{\tfrac{9}{12} + \tfrac{20}{12}} = \overline{\tfrac{29}{12}} = \overline{\tfrac{5}{12} + 2} = \overline{\tfrac{5}{12}}$$

Ein Repräsentant von $\overline{\tfrac{3}{4}} + \overline{\tfrac{5}{3}}$ zwischen 0 und 1 ist also durch $\tfrac{5}{12}$ gegeben.

(ii)

Die Bedingung $3g = \overline{0}$ übersetzt sich auf der Ebene der Repräsentanten zu $3\tfrac{a}{b} \in \mathbb{Z}$, wobei $\overline{\tfrac{a}{b}} = g$. Wir suchen somit rationale Zahlen $\tfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ mit $3\tfrac{a}{b} \in \mathbb{Z}$. Das sind die Zahlen der Form $\tfrac{h}{3}$ mit $h \in \mathbb{Z}$. Die Restklassen davon mod $\mathbb{Z}$ sind nun $\overline{0} = \overline{\tfrac{0}{3}}$, $\overline{\tfrac{1}{3}}$ und $\overline{\tfrac{2}{3}}$. Das sind also unsere gesuchten Gruppenelemente.

(iii)

Sei $g = \overline{\tfrac{a}{b}}$ mit $\tfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Dann ist

$$b \cdot g = b \cdot \overline{\tfrac{a}{b}} = \overline{b \cdot \tfrac{a}{b}} = \overline{a} = \overline{0},$$

b-fache Addition

da $a \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 3 (2+3+2 Punkte):

(i) Weisen Sie nach, dass das Tupel $((1,1,2),(1,2,3)) \in (\mathbb{R}^3)^2$ linear unabhängig ist.

(ii) Finden Sie eine lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $\ker(f) = \langle (1,1,2),(1,2,3)\rangle_{\mathbb{R}}$

(iii) Sei nun $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ eine beliebige lineare Abbildung mit $\ker(g) = \langle (1,1,2),(1,2,3)\rangle_{\mathbb{R}}$. Zeigen Sie, dass das Tupel $(g((1,0,0)), g((0,0,1))) \in (\mathbb{R}^2)^2$ linear abhängig ist.

(i)

Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\lambda(1,1,2) + \mu(1,2,3) = (0,0,0)$. Dann erhalten wir direkt $\lambda = -\mu$ und $\lambda = -2\mu$, sodass $\mu = 0$ ist. Folglich ist auch $\lambda = 0$. Also ist $((1,1,2),(1,2,3)) \in (\mathbb{R}^3)^2$ linear unabhängig.

(ii)

Wir ergänzen das Tupel $((1,1,2),(1,2,3))$ vermöge $e_3 = (0,0,1)$ zu einer Basis des $\mathbb{R}^3$. Da $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, genügt es hierfür die lineare Unabhängigkeit zu überprüfen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}-2\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}-\mathrm{I}}{\leadsto}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}-\mathrm{II}}{\overset{\mathrm{I}-\mathrm{II}}{\leadsto}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{invertierbar}}$$

Also ist $((1,1,2),(1,2,3),(0,0,1))$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Wir definieren nun $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ vermöge gegebener Basis:

$(1,1,2) \mapsto 0$

$(1,2,3) \mapsto 0$

$(0,0,1) \mapsto (1,0)$

Dann sind $(1,1,2), (1,2,3) \in \ker(f)$ und somit $\langle (1,1,2),(1,2,3)\rangle_{\mathbb{R}} \subset \ker(f)$, da $\ker(f)$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ ist. Sei nun $v \in \ker(f)$ und schreibe $v = \lambda(1,1,2) + \mu(1,2,3) + \rho(0,0,1)$. Dann ist

$$0 = f(v) = f(\lambda(1,1,2) + \mu(1,2,3) + \rho(0,0,1)) \overset{\text{lin.}}{=} \lambda \underbrace{f(1,1,2)}_{=0} + \mu \underbrace{f(1,2,3)}_{=0} + \rho \underbrace{f(0,0,1)}_{=(1,0)}$$

und somit $\rho = 0$. Also ist $v \in \langle (1,1,2),(1,2,3)\rangle_{\mathbb{R}}$ und demnach insgesamt $\ker(f) = \langle (1,1,2),(1,2,3)\rangle_{\mathbb{R}}$

(iii)

Es ist $(1,0,1) = 2(1,1,2) - (1,2,3) \in \ker(g)$. Somit erhalten wir

$$0 = g((1,0,1)) \overset{\text{lin.}}{=} g((1,0,0)) + g((0,0,1)),$$

sodass $(g((1,0,0)), g((0,0,1))) \in (\mathbb{R}^2)^2$ linear abhängig sind.

Aufgabe 4 (2+3+2 Punkte):

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix, die in jeder Spalte genau eine 1 und sonst nur 0en besitzt.

(i) Was kann der Rang einer solchen Matrix sein?

(ii) Was kann die Determinante von A sein?

(iii) Wir nehmen nun zusätzlich an, dass $\operatorname{rk}(A) = n$ ist. Begründen Sie, dass auch A^{-1} in jeder Spalte genau eine 1 und sonst nur 0en besitzt und geben Sie zudem an, in welchen Zeilen sich die 1en befinden.

(i)

Da A nicht die Nullmatrix ist, kann 0 nicht als Rang von A auftreten. Alle anderen möglichen Ränge $1 \leq r \leq n$ werden aber angenommen:

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 & 1 & & 1 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 & & 0 \\ & 0 & & \vdots & & & \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 & \vdots & \cdots & \vdots \\ & & & 1 & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccccc} e_1 & e_2 & & e_r & & & \end{array} \end{array} = (e_1|e_2|\dots|e_r|e_1|\dots|e_1)$$

hat Rang r, da $\dim(\langle e_1, \dots, e_r, e_1, \dots, e_1\rangle_{\mathbb{R}}) = \dim(\langle e_1, \dots, e_r\rangle_{\mathbb{R}}) = r$

(ii)

Ist $n = 1$, so ist $A = (1)$ und die Determinante ist 1.

Ist $n \geq 2$, so ist $\det(A) \in \{0, \pm 1\}$ und alle drei Werte treten auf:

$n = 2$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ } I.A.

$\det = 0$ $\quad \det = 1$ $\quad \det = -1$ $\quad \det = 0$

Ang.: die Beh. stimmt für ein $n \geq 2$. Ist nun $A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ mit genau einer 1 pro Spalte und nur 0en sonst, so erhalten wir

$$\det(A) \overset{\text{Entw.}}{\underset{\text{1. Spalte}}{=}} (-1)^{k+1} \cdot 1 \cdot \det(A_{(k,1)}),$$

wobei k die Zeile mit der 1 in der ersten Spalte ist. Ist nun nach Annahme $\det(A_{(k,1)}) \in \{0, \pm 1\}$, so also auch $\det(A) \in \{0, \pm 1\}$. Ansonsten hat $A_{(k,1)}$ eine Nullspalte, sodass $\det(A_{(k,1)}) = 0$ und somit auch $\det(A) = 0$. } I.S.

Alle drei Werte tauchen auf:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ & & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

det = 1

det = − 1, da genau eine Zeilenvertauschung notwendig um $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ zu werden

det = 0, da offenbar nicht voller Rang

(iii)

Da $rk(A) = n$ voll ist, kann auch in jeder Zeile von A nur genau eine 1 sein. Somit erhalten wir A^{-1} rein vermöge von Zeilenvertauschungen

$$(A \mid 1_n) \rightsquigarrow (1_n \mid A^{-1}).$$

Insbesondere ändert sich die Anzahl der 1en und 0en in den Spalten nicht.

Ist $\sigma: \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ die Bijektion, welche die Zeilen von $1_n = (e_1 | \dots | e_n)$ so vertauscht, dass A entsteht, so sorgt σ^{-1} genau für die Positionen der 1en von A^{-1}. Denn bei oben erwähnten Zeilenvertauschungen (Gauß-Alg) müssen wir genau so vertauschen, dass wir σ invertieren. Konkret bedeutet dies also, dass wenn

σ(k-te Zeile) = l-te Zeile für $1 \leq k, l \leq n$,

dass dann

σ^{-1}(l-te Zeile) = k-te Zeile ist und wir so die 1en in A^{-1} finden können.

Aufgabe 5 (2+3+2 Punkte):

(i) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(ii) Geben Sie zu jedem Eigenwert von A einen zugehörigen Eigenvektor an.

(iii) Ist die Matrix A diagonalisierbar? Falls ja, geben eine Diagonalform D von A an.

(i)

$$\chi_A(x) = \det\begin{pmatrix} x & -1 & 2 \\ 2 & x-3 & 2 \\ 0 & 0 & x-2 \end{pmatrix} \underset{\text{3. Zeile}}{\overset{\text{Entw.}}{=}} (x-2)\det\begin{pmatrix} x & -1 \\ 2 & x-3 \end{pmatrix} = (x-2)\underbrace{(x(x-3)+2)}_{\substack{x^2-3x+2 \\ =(x-1)(x-2)}}$$

$$= (x-1)(x-2)^2$$

Die Eigenwerte von A sind also 1 und 2.

(ii)

Eigenvektor zum EW. 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{II-2I}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{III - \frac{1}{2}II}{\overset{I+II}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Somit ist $(1,1,0)$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 1

Eigenvektor zum EW. 2:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{II-I}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Somit ist $(1,4,1)$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 2

(iii)

Der Lösungsraum des Gleichungssystemes, welches durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

codiert ist, ist durch

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 2z = 0\} = \{(x, 2x+2z, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{x(1,2,0) + z(0,2,1) \mid x, z \in \mathbb{R}\}$$

gegeben. Da

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{3\times 3-}{\underset{\text{Formel}}{=}} 2 - 1 = 1,$$

ist $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ invertierbar und somit $((1,1,0),(1,2,0),(0,2,1)) \in (\mathbb{R}^3)^3$ eine Basis aus Eigenvektoren. Also ist A diagonalisierbar mit Diagonalform $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.