# Kurzskript Lineare Algebra I

Immi Halupczok

26. Mai 2023

## Inhaltsverzeichnis

# Lineare Algebra I

## 1 Mathematische Grundbegriffe

### 1.1 Lineare Gleichungssysteme

Definitionen, Konventionen, etc., die in dieser Farbe geschrieben sind, sind Grundlagen, die thematisch nicht zum Abschnitt gehören (aber eingeführt werden, wenn sie zum ersten Mal benötigt werden).

**Definition 1.1.1 (unpräzise)** (a) *Die **natürlichen Zahlen** sind* $0, 1, 2, 3, \ldots$.[1] *Die Menge aller natürlichen Zahlen wird mit* $\mathbb{N}$ *bezeichnet, d. h. statt „$x$ ist eine natürliche Zahl“ schreiben wir auch „$x \in \mathbb{N}$“.*

(b) *Die **ganzen Zahlen** sind* $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$. *Die Menge der ganzen Zahlen wird mit* $\mathbb{Z}$ *bezeichnet.*

(c) *Eine rationale Zahl ist eine Zahl, die sich als Bruch* $\frac{a}{b}$ *schreiben lässt, wobei* $a$ *eine beliebige ganze Zahl ist und* $b$ *eine ganze Zahl ungleich* $0$. *Die Menge der rationalen Zahlen wird mit* $\mathbb{Q}$ *bezeichnet.*

(d) *(Reelle Zahlen werden in der Analysis-Vorlesung definiert.) Die Menge der reellen Zahlen wird mit* $\mathbb{R}$ *bezeichnet.*

**Konvention 1.1.2** *Eine **Variable** ist ein Symbol, das für ein mathematisches Objekt (ihr **Wert**) stehen kann. Als Symbol werden meist Buchstaben verwendet, z. T. mit „Dekorationen“ (z. B.* $a'$, $\tilde{a}$, $\hat{a}$, $\underline{a}$, $\ldots$*). Kommt das gleiche Symbol mit verschiedenen Dekorationen vor, so sind dies verschiedene Variablen. Ist der Wert einer Variablen festgelegt, so nennt man sie oft auch eine **Konstante**.*

**Konvention 1.1.3** *Symbole können außerdem ein oder mehrere mathematische Objekte als Indizes erhalten (z. B.* $a_1, a_2, a_{7,8}$*). Das gleiche Symbol mit verschiedenen Indizes sind verschiedene Variablen.*

**Definition 1.1.4** *Sei* $n$ *eine natürliche Zahl und seien* $a_1, \ldots, a_n$ *und* $b$ *reelle Zahlen. Einen Ausdruck der Form*

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = b$$

*(wobei* $x_1, \ldots, x_n$ *Variablen sind), nennt man eine **lineare Gleichung** (in* $x_1, \ldots, x_n$*).*

[1] Es besteht unter Mathematikern keine Einigkeit darüber, ob 0 als natürliche Zahl bezeichnet wird oder nicht. In dieser Vorlesung ist 0 eine natürliche Zahl.

**Definition 1.1.5** (a) *Sind $a_1$ und $a_2$ beliebige mathematische Objekte, so schreibt man $(a_1, a_2)$ für das (**geordnete**) **Paar** bestehend aus $a_1$ und $a_2$. Zwei Paare $(a_1, a_2)$ und $(b_1, b_2)$ werden als gleich angesehen (als Formel: „$(a_1, a_2) = (b_1, b_2)$“), wenn die entsprechenden Einträge gleich sind, also wenn $a_1 = b_1$ ist und $a_2 = b_2$.*

(b) *Analog definiert man **Tripel** $(a_1, a_2, a_3)$, **Quadrupel** $(a_1, a_2, a_3, a_4)$, etc., und allgemeiner $n$-**Tupel** $(a_1, \ldots, a_n)$ für beliebige $n \geq 0$.*

(c) *Die Menge der $n$-Tupel, deren Einträge aus einer gegebenen Menge $M$ stammen, wird mit $M^n$ bezeichnet.*

Bemerkung: Üblicherweise unterscheidet man nicht zwischen einem 1-Tupel $(a)$ und dem Element $a$ selbst.

**Definition 1.1.6** *Eine **Lösung** einer linearen Gleichung*

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = b$$

*ist ein $n$-Tupel $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$, so dass*

$$a_1 c_1 + \cdots + a_n c_n = b$$

*gilt.*

**Konvention 1.1.7** *Ist $n = 0$, so ist die Notation „$a_1 + \cdots + a_n$“ als $0$ zu interpretieren.*

**Definition 1.1.8** *Seien $m$ und $n$ natürliche Zahlen. Ein **lineares Gleichungssystem** in einem Variablentupel $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ ist ein Tupel $\underline{L} := (L_1, \ldots, L_m)$, wobei jedes $L_i$ eine lineare Gleichung in $\underline{x}$ ist. Eine Lösung von $\underline{L}$ ist ein Tupel $\underline{c} \in \mathbb{R}^n$, das eine Lösung von jeder der Gleichungen $L_1, \ldots, L_m$ ist.*

**Definition 1.1.9** *Sei*

$$\underline{L} := \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{pmatrix} \tag{1}$$

*ein lineares Gleichungssystem.*

(a) *Die **Koeffizientenmatrix** von $\underline{L}$ ist das Tupel*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \in \mathbb{R}^{m\cdot(n+1)}. \tag{2}$$

(b) *Ist $b_1 = \cdots = b_m = 0$, so nennt man $\underline{L}$ **homogen**. In diesem Fall betrachtet man als Koeffizientenmatrix oft nur das Tupel*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \cdot n}. \tag{3}$$

*(Zur Unterscheidung nennt man (2) manchmal die **erweiterte Koeffizientenmatrix** von $\underline{L}$.)*

**Lemma 1.1.10** *Sei $\underline{L}$ ein homogenes lineares Gleichungssystem in $n$ Variablen. Dann gilt:*

(a) *Das $n$-Tupel $(0, \ldots, 0)$ ist eine Lösung von $\underline{L}$ (die **triviale Lösung**).*
(b) *Sind $\underline{c} = (c_1, \ldots, c_n)$ und $\underline{c}' = (c'_1, \ldots, c'_n)$ Lösungen von $\underline{L}$, so ist auch $\underline{c}+\underline{c}' := (c_1 + c'_1, \ldots, c_n + c'_n)$ eine Lösung von $\underline{L}$.*
(c) *Ist $\underline{c} = (c_1, \ldots, c_n)$ eine Lösung von $\underline{L}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, so ist auch $\lambda\underline{c} := (\lambda c_1, \ldots, \lambda c_n)$ eine Lösung von $\underline{L}$.*

**Lemma 1.1.11** *Seien $L :=$ „$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$“ und $L' :=$ „$a'_1x_1 + \cdots + a'_nx_n = b'$“ lineare Gleichungen und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir nehmen an, dass $\underline{c} \in \mathbb{R}^n$ sowohl Lösung von $L$ als auch Lösung von $L'$ ist. Dann ist $\underline{c}$ auch eine Lösung von*

$$L + L' := \text{„}(a_1 + a'_1)x_1 + \cdots + (a_n + a'_n)x_n = (b + b')\text{“}.$$

*und von*

$$\lambda \cdot L := \text{„}(\lambda a_1)x_1 + \cdots + (\lambda a_n)x_n = \lambda b\text{“}.$$

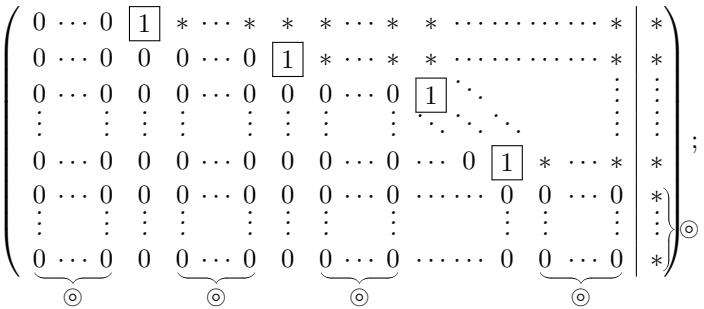
**Definition 1.1.12** *Sei $\underline{L}$ ein Gleichungssystem. Eine **elementare Transformation** von $\underline{L}$ ist ein Gleichungssytem $\underline{L}'$, das man auf eine der folgenden Arten aus $\underline{L}$ erhält:*

(a) *zwei Gleichungen tauschen;*
(b) *eine Gleichung durch ihr $\lambda$-faches ersetzen, für eine reelle Zahl $\lambda \neq 0$;*
(c) *zu einer der Gleichungen von $\underline{L}$ das $\lambda$-fache einer anderen Gleichung von $\underline{L}$ addieren, für eine beliebige reelle Zahl $\lambda$.*

**Lemma 1.1.13** *Ist $\underline{L}$ ein lineares Gleichungssystem und $\underline{L}'$ eine elementare Transformation von $\underline{L}$, so ist auch $\underline{L}$ eine elementare Transformation von $\underline{L}'$.*

**Satz 1.1.14** *Ist $\underline{L}$ ein lineares Gleichungssystem und $\underline{L}'$ eine elementare Transformation von $\underline{L}$, so haben $\underline{L}$ und $\underline{L}'$ die selben Lösungen.*

**Definition 1.1.15** *Man sagt, ein Gleichungssystem ist in* ***Zeilenstufenform****, wenn seine Koeffizientenmatrix die folgende Form hat:*



*Hierbei steht jedes „$*$“ für eine beliege reelle Zahl, und die mit ⊙ markierten Zeilen und Spalten müssen nicht vorhanden sein. Die eingekästelten $1$en (d. h. die ersten nicht-0-Einträge jeder Zeile) nennt man* ***Pivot-Elemente****.*

**Satz 1.1.16 (Gauß-Elimination)** *Jedes Gleichungssystem kann durch endlich viele elementare Transformationen in Zeilenstufenform gebracht werden.*

**Satz 1.1.17** *Sei $\underline{L}$ ein lineares Gleichungssystem in Zeilenstufenform. Dann gilt:*

(a) *Existiert in der Koeffizientenmatrix von $\underline{L}$ eine Zeile der Form $(0 \cdots 0 \mid b_i)$ mit $b_i \neq 0$, so besitzt $\underline{L}$ keine Lösung.*

(b) *Existiert keine solche Zeile, so besitzt $\underline{L}$ Lösungen. In diesem Fall lassen sich sämtliche Lösungen erhalten, indem man der Reihe nach $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$ folgendermaßen wählt:*

  (i) *Enhält die $j$-te Spalte kein Pivot-Element, so kann $x_j$ beliebig gewählt werden.*

  (ii) *Enhält die $j$-te Spalte ein Pivot-Element in der $i$-ten Zeile, so ist $x_j$ durch $x_{j+1}, \ldots, x_n$ eindeutig festgelegt, nämlich: Hat die $i$-te Zeile die Form*

$$(0 \cdots 0\ 1\ a_{i,j+1} \cdots a_{i,n} \mid b_i),$$

  *so ist $x_j = b_i - a_{i,j+1}x_{j+1} - a_{i,j+2}x_{j+2} - \cdots - a_{i,n}x_n$.*

**Korollar 1.1.18** *Sei $\underline{L}$ ein lineares Gleichungssystem mit mehr Variablen als Gleichungen.*

(a) *Ist $\underline{L}$ homogen, so hat $\underline{L}$ unendlich viele nicht-triviale Lösung.*

(b) *Hat $\underline{L}$ mindestens eine Lösung, so hat $\underline{L}$ bereits unendlich viele Lösungen.*

## 1.2 Logik und Mengen

**Definition 1.2.1 (unpräzise)** (a) *Eine* ***(mathematische) Aussage*** *ist ein Textfragment $A$ (evtl. mit mathematischen Symbolen), für das die Frage Sinn er-*

*gibt, ob es wahr oder falsch ist. Man sagt auch, dass A* ***gilt****, bzw.* ***nicht gilt****; oder: Der* ***Wahrheitswert*** *von A ist wahr bzw. falsch.*
*Der Wahrheitswert einer Aussage A kann von Variablen abhängen. In diesem Fall sagen wir auch, dass A eine* ***Aussage über*** *diese Variablen ist.*

(b) *Ein* ***Term*** *ist Textfragment T (evtl. mit mathematischen Symbolen), das das ein mathematisches Objekt beschreibt; dieses Objekt nennt man den* ***Wert*** *von T. Meistens hängt der Wert von T von Variablen ab; man nennt T dann einen* ***Term in*** *diesen Variablen.*

**Definition 1.2.2** *Sind A und B Aussagen, so definiert man daraus die folgenden neuen Aussagen:*

(a) *„$A \wedge B$“ ist wahr genau dann, wenn sowohl A als auch B wahr ist. Man nennt dies die* ***Konjunktion*** *von A und B.*

(b) *„$A \vee B$“ ist wahr genau dann, wenn mindestens eine der Aussagen A und B wahr sind. Man nennt dies die* ***Disjunktion*** *von A und B.*

(c) *„$\neg A$“ ist wahr genau dann, wenn A falsch ist. Man nennt dies die* ***Negation*** *von A.*

(d) *„$A \Rightarrow B$“ wahr ist genau dann, wenn A falsch ist oder B wahr oder beides. Man schreibt auch „$B \Leftarrow A$“ und sagt auch „A* ***impliziert*** *B“ oder „B* ***folgt aus*** *A“.*

(e) *„$A \Leftrightarrow B$“ wahr ist genau dann, wenn A und B den gleichen Wahrheitswert haben. Man sagt auch, „A ist* ***äquivalent*** *zu B“ oder „A und B sind äquivalent“ oder „A gilt genau dann, wenn B gilt“.*

**Definition 1.2.3 (ungenau)** (a) *Eine* ***Menge*** *M ist ein mathematisches Objekt, das dadurch charakterisiert ist, welche mathematischen Objekte ihre* ***Elemente*** *sind. Statt „x ist ein Element von M“ sagt man auch: „x liegt in M“ oder „M enthält x“. Notation dafür: „$x \in M$“*

(b) *Weitere Notationen:*
*„$x \notin M$“ bedeutet: x ist kein Element von M.*
*„$x, y \in M$“ bedeutet: sowohl x als auch y sind Elemente von M; etc.*

(c) *Die* ***leere Menge*** *ist die Menge, die gar keine Elemente hat. Sie wird mit $\emptyset$ bezeichnet.*

**Definition 1.2.4** *Sind $x_1, \ldots, x_n$ beliebige mathematische Objekte, so schreiben wir*

$$\{x_1, \ldots, x_n\}$$

*für die Menge, deren Elemente genau $x_1, \ldots, x_n$ sind:*

$$y \in \{x_1, \ldots, x_n\} \iff (y = x_1 \vee \cdots \vee y = x_n).$$

Bemerkung: Eine ein-elementige Menge $\{a\}$ wird *nicht* als das gleiche angesehen wie das Element $a$ selbst. Außerdem: Ist ein Element $A$ von $M$ selbst wieder eine

Menge, so werden die Elemente von $A$ *nicht* automatisch auch als Elemente von $M$ angesehen.

**Definition 1.2.5** (a) *Ist $M$ eine Menge und $A$ eine Aussage über eine Variable $x$, so schreiben wir $\{x \in M \mid A\}$ für die Menge derjenigen Elemente $x \in M$, für die die Aussage $A$ wahr ist. (Manche Leute scheiben auch „$\{x \in M : A\}$“.) Wenn man $M$ aus dem Kontext erraten kann, schreibt man oft auch nur $\{x \mid A\}$. Ist $A'$ eine weitere Aussage, so schreibt man statt $\{x \mid A \wedge A'\}$ oft auch $\{x \mid A, A'\}$.*

(b) *Ist $A$ eine Aussage über eine Variable $x$ und $T$ ein Term in $x$, so schreibt man $\{T \mid A\}$ für die Menge aller Werte, die der Term $T$ annehmen kann, wenn man für $x$ Objekte einsetzt, für die $A$ wahr ist. Man verwendet auch analoge Notationen, wenn $A$ und $T$ Aussagen in mehreren Variablen sind.*

**Definition 1.2.6** *Ist $M$ eine Menge, so schreiben wir $\#M$ für die Anzahl der Elemente von $M$; man nennt dies auch die **Kardinalität** (oder **Mächtigkeit**) von $M$. (Statt $\#M$ kann man auch $|M|$ schreiben.) Genauer: Lässt sich $M = \{x_1, \ldots, x_n\}$ schreiben für paarweise veschiedene $x_i$, so nennen wir $M$ **endlich** und setzen $\#M := n$. Lässt sich $M$ nicht so schreiben, so nennen wir $M$ **unendlich** und setzen (in dieser Vorlesung[2]) $\#M := \infty$.*

**Definition 1.2.7** *Sei $A$ eine Aussage über eine Variable $x$ und sei $M$ eine Menge.*

(a) *Die Notation*

$$\forall x \in M : A$$

*bedeutet: $A$ gilt für jedes Element $x$ von $M$. Manchmal schreibt man auch „$A \quad \forall x \in M$“.*
*Ist $M$ leer, so wird „$\forall x \in M : A$“ als wahr angesehen.*

(b) *Die Notation*

$$\exists x \in M : A$$

*bedeutet: Es existiert mindestens ein Element $x$ von $M$, für das $A$ wahr ist.*

(c) *Die Notation*

$$\exists^{=1} x \in M : A$$

*bedeutet: Es existiert genau ein Element $x$ von $M$, für das $A$ wahr ist.*

(d) *Die Aussage „$A$ gilt für **fast alle** $x \in M$“ bedeutet: Es gibt nur endlich viele Elemente in $M$, für die $A$ nicht gilt. (Anders ausgedrückt: Die Menge $\{x \in M \mid \neg A\}$ ist endlich.)*

[2] Auch bei unendlichen Mengen $M$ kann man noch „verschieden große“ Mengen unterscheiden: Gibt es eine Bijektion (siehe Definition 1.3.9) von $M$ nach $\mathbb{N}$, so nennt man $M$ **abzählbar**, sonst **überabzählbar**. Allgemeiner sagt man, zwei Mengen $M$ und $M'$ haben die gleiche Kardinalität, wenn eine Bijektion von $M$ nach $M'$ existiert.

*Die Symbole $\forall$ und $\exists$ nennt man* ***Quantoren****. Wenn man $M$ aus dem Kontext erraten kann, schreibt man in den obigen Notationen oft nur „$x$“ statt „$x \in M$“.*

*Die Notation*

$$\forall x, y \in M : A$$

*ist eine Kurzschreibweise für „$\forall x \in M : \forall y \in M : A$“; etc.*

**Definition 1.2.8** *Seien $A$ und $B$ Mengen.*

(a) *$A$ heißt* ***Teilmenge*** *von $B$ wenn jedes Element von $A$ auch Element von $B$ ist. Man sagt auch: „$A$ ist eine* ***Untermenge*** *von $B$“; oder: „$B$ ist eine* ***Obermenge*** *von $A$“. Notationen: $A \subseteq B$; $B \supseteq A$.*

(b) *Die Notation $A \subsetneq B$ bedeutet: $A \subseteq B$ aber $A \neq B$; man sagt: „$A$ ist eine* ***echte Teilmenge*** *von $B$.“*

**Definition 1.2.9** *Seien $A$ und $B$ Mengen.*

(a) *Die* ***Vereinigung*** *von $A$ und $B$ ist $A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ (Man sagt auch „$A$* ***vereinigt*** *$B$“).*

(b) *Der* ***Schnitt*** *von $A$ und $B$ ist $A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ (Man sagt auch „$A$* ***geschnitten*** *$B$“). Ist $A \cap B = \emptyset$, so sagt man, die Mengen $A$ und $B$ sind* ***disjunkt****.*

(c) *Die* ***Differenz*** *von $A$ und $B$ ist $A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ (Man sagt auch „$A$* ***ohne*** *$B$“).*

**Definition 1.2.10** *Ist $A$ eine Menge, so bezeichnet*

$$\mathcal{P}(A) := \{B \mid B \subseteq A\}$$

*die Menge aller Teilmengen von $A$; $\mathcal{P}(A)$ wird* ***Potenzmenge*** *von $A$ genannt.*

**Definition 1.2.11** (a) *Sind $M_1$ und $M_2$ Mengen, so schreibt man $M_1 \times M_2$ für die Menge der Paare $(x_1, x_2)$ bestehend aus einem Element $x_1$ von $M_1$ und einem Element von $x_2$ von $M_2$. Man nennt $M_1 \times M_2$ das* ***kartesische Produkt*** *von $M_1$ und $M_2$. Analog schreibt man $M_1 \times M_2 \times M_3$ für die Menge der Tripel, etc.*

(b) *Ist $M$ eine Menge, so schreibt man statt $\underbrace{M \times \cdots \times M}_{n \text{ mal}}$ auch $M^n$ (vgl. Definition 1.1.5). Hierbei ist $M^1 = M$, und $M^0$ ist die Menge, deren einziges Element das leere Tupel ist.*

Bemerkung: Meistens identifiziert man verschiedene Klammerungen von kartesischen Produkten, also z. B.: $(M_1 \times M_2) \times M_3 = M_1 \times M_2 \times M_3 = M_1 \times (M_2 \times M_3)$.

**Notation 1.2.12** *Sind $m \leq n$ zwei ganze Zahlen und sind $A_m, A_{m+1}, \ldots, A_n$ Mengen, so verwendet man folgende Notationen:*

(a) $\bigcup_{i=m}^{n} A_i := A_m \cup A_{m+1} \cup \cdots \cup A_n$

(b) $\bigcap_{i=m}^{n} A_i := A_m \cap A_{m+1} \cap \cdots \cap A_n$

(c) $\prod_{i=m}^{n} A_i := A_m \times A_{m+1} \times \cdots \times A_n$

*Die Beschriftung „$i = m$“ und „$n$“ am großen Symbol ist also zu interpretieren als: $i$ soll alle ganzen Zahlen von $m$ bis $n$ durchlaufen.*

**Konvention 1.2.13** *Sei $I$ eine (möglicherweise unendliche) Indexmenge und sei $A_i$ eine Menge für jedes $i \in I$.*

(a) $\bigcup_{i\in I} A_i$ *ist die Menge derjenigen Elemente, die in jeder mindestens einer der Mengen $A_i$ liegen. Im Fall $I = \emptyset$ setzt man $\bigcup_{i\in I} A_i := \emptyset$.*

(b) $\bigcap_{i\in I} A_i$ *ist die Menge derjenigen Elemente, die in jeder der Mengen $A_i$ liegen. Im Fall $I = \emptyset$ ist $\bigcap_{i\in I} A_i$ nicht definiert.*

**Definition 1.2.14** *Sei $I$ eine (möglicherweise unendliche) Indexmenge.*

(a) *Ein **mit $I$ indiziertes Tupel** ist ein mathematisches Objekt $\underline{a}$, das jedem Index $i \in I$ ein mathematisches Objekt $a_i$ zuordnet. Sind diese $a_i$ gegeben, so schreibt man auch $(a_i)_{i\in I}$ für das Tupel $\underline{a}$.*

(b) *Ist $A_i$ eine Menge für jedes $i \in I$, so bezeichnet*

$$\prod_{i\in I} A_i$$

*die Menge derjenigen mit $I$ indizierten Tupel $(a_i)_{i\in I}$, bei denen $a_i \in A_i$ ist für alle $i \in I$. Man nennt diese Menge das **kartesische Produkt** der Mengen $A_i$. Ist $I = \emptyset$, so ist $\prod_{i\in I} A_i$ die Menge, die das leere Tupel als einziges Element hat.*

(c) *Ist $A$ eine Menge, so schreibt man statt $\prod_{i\in I} A$ auch $A^I$.*

## 1.3 Abbildungen

**Definition 1.3.1** *Seien $A$ und $B$ Mengen. Eine **Abbildung** $f$ (oder **Funktion**) von $A$ nach $B$ ist ein mathematisches Objekt $f$, dass jedem Element $a \in A$ ein Element $f(a) \in B$ zuordnet. Ist $f(a) = b$, so sagt man, $f$ **bildet** $a$ auf $b$ **ab**.*

*Formal ist eine Abbildung gegeben durch eine Menge $G \subseteq A \times B$, mit der Eigenschaft, dass für jedes $a \in A$ genau ein $b \in B$ existiert mit $(a, b) \in G$; die einer Abbildung $f$ entsprechende Menge ist $G = \{(a, f(a)) \mid a \in A\}$.*

*"$\mathrm{Abb}(A, B)$" bezeichnet die Menge aller Abbildungen von $A$ nach $B$. Statt „$f \in \mathrm{Abb}(A, B)$" schreibt man auch „$f\colon A \to B$", und statt $f(a) = b$ schreibt man auch „$f\colon a \mapsto b$".*

*Man nennt $A$ den **Definitionsbereich** von $f$, $B$ den **Wertebereich** von $f$ und $G$ den **Graph** von $f$.*

**Konvention 1.3.2** *Ist $f\colon A_1 \times A_2 \to B$, so schreibt man statt $f((a_1, a_2))$ auch $f(a_1, a_2)$ (für $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2$). Und analog für $f\colon A_1 \times A_2 \times A_3 \to B$, etc.*

**Bemerkung 1.3.3** *Seien $A$ und $I$ Mengen. Jeder Abbildung aus $\mathrm{Abb}(I, A)$ entspricht genau ein Tupel aus $A^I$ und umgekehrt, nämlich: Der Abbildung $f \in \mathrm{Abb}(I, A)$ entspricht das Tupel $(a_i)_{i \in I} \in A^I$ mit $a_i = f(i)$ für alle $i \in I$.*

**Definition 1.3.4** *Die **Identität** auf einer Menge $A$ ist $\mathrm{id}_A\colon A \to A, a \mapsto a$.*

**Definition 1.3.5** *Seien $A$, $B$, $C$ Mengen und seien $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to C$ Abbildungen. Dann ist die **Verkettung** (man sagt auch „**Verknüpfung**") von $f$ und $g$ die Abbildung*

$$g \circ f\colon A \to C, a \mapsto g(f(a)).$$

*„$g \circ f$" spricht man oft „$g$ **nach** $f$" aus.*

**Definition 1.3.6** *Ist $f\colon A \to A$ eine Abbildung von $A$ in sich selbst und ist $k \in \mathbb{N}$, so setzen wir $f^k := \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ mal}}$ falls $k \geq 1$, und $f^0 := \mathrm{id}_A$.*

**Definition 1.3.7** *Seien $A$ und $B$ Mengen, und sei $f\colon A \to B$.*

(a) *Ist $A' \subseteq A$, so ist $f(A') := \{f(a) \mid a \in A'\}$ das **Bild von $A'$ unter $f$**.*
(b) *Das Bild unter $f$ des gesamten Definitionsbereichs $A$ wird auch einfach nur **Bild** von $f$ genannt. Notation dafür: $\mathrm{im}\, f := f(A)$.*
(c) *Ist $B' \subseteq B$, so ist $f^{-1}(B') := \{a \in A \mid f(a) \in B'\}$ das **Urbild von $B'$ unter $f$**.*
(d) *Ist $b \in B$, so schreibt man oft auch $f^{-1}(b)$ statt $f^{-1}(\{b\})$. Besteht die Menge $f^{-1}(b)$ aus genau einem Element $a$, so meint man mit $f^{-1}(b)$ oft auch nur dieses Element $a$ (und nicht die Menge $\{a\}$).*

**Definition 1.3.8** *Ist $f\colon A \to B$ eine Abbildung und $A' \subseteq A$ eine Teilmenge, so schreiben wir $f|_{A'}$ für die **Einschränkung** von $f$ auf $A'$, d. h. $f|_{A'}\colon A' \to B, a \mapsto f(a)$.*

**Definition 1.3.9** *Seien $A$ und $B$ Mengen, und sei $f\colon A \to B$.*

(a) *$f$ heißt **injektiv**, wenn für alle $b \in B$ gilt: $\#(f^{-1}(b)) \leq 1$.*
*Man sagt auch „$f$ ist eine **Injektion** von $A$ nach $B$“ und schreibt dafür „$f\colon A \hookrightarrow B$“.*

(b) *$f$ heißt **surjektiv**, wenn für alle $b \in B$ gilt: $\#(f^{-1}(b)) \geq 1$.*
*Man sagt auch „$f$ ist eine **Surjektion** von $A$ nach $B$“ und schreibt dafür „$f\colon A \twoheadrightarrow B$“.*

(c) *$f$ heißt **bijektiv**, wenn für alle $b \in B$ gilt: $\#(f^{-1}(b)) = 1$.*
*Man sagt auch „$f$ ist eine **Bijektion** zwischen $A$ und $B$“ und schreibt dafür „$f\colon A \xrightarrow{1:1} B$“.*

*(Ob eine Abbildung surjektiv bzw. bijektiv ist, hängt davon ab, welche Menge man als den Wertebereich betrachtet.)*

**Satz 1.3.10** *Seien $A$ und $B$ endliche Mengen gleicher Kardinalität. Dann gilt für Abbildungen $f \in \mathrm{Abb}(A, B)$: Ist $f$ injektiv oder surjektiv, so ist $f$ bereits bijektiv.*

**Satz 1.3.11** *Seien $A$ und $B$ Mengen und sei $f\colon A \to B$ eine Abbildung.*

(a) *Ist $f$ bijektiv, so existiert genau eine Abbildung $g\colon B \to A$, so dass gilt: $f \circ g = \mathrm{id}_B$ und $g \circ f = \mathrm{id}_A$.*

(b) *Es gilt auch umgekehrt: Existiert eine Abbildung $g$ wie in (a), so ist $f$ bijektiv.*

**Definition 1.3.12** *Ist $f\colon A \to B$ bijektiv, so nennt man die Abbildung $g$ aus Satz 1.3.11 das **Inverse** von $f$ (oder auch auch „**Umkehrabbildung** von $f$“). Die Notation für diese Abbildung ist $f^{-1}$. Im Fall $B = A$ setzt man auch $f^{-k} := (f^{-1})^k$ für $k \in \mathbb{N}$.*

**Bemerkung 1.3.13** *Bei bijektiven Abbildungen $f\colon A \to B$ passt die Notation $f^{-1}$ für die Umkehrabbildung mit der Notation für Urbilder (Definition 1.3.7) zusammen: Für $B' \subseteq B$ ist das Urbild von $B'$ unter $f$ das selbe wie das Bild von $B'$ unter der Umkehrabbildung $f^{-1}$, und für $b \in B$ ist das Urbild von $b$ unter $f$ genau das Bild von $b$ unter $f^{-1}$.*

## 1.4 Partitionen und Äquivalenzrelationen

**Definition 1.4.1** *Sei $A$ eine Menge.*

(a) *Eine **Relation** auf $A$ ist gegeben durch eine Teilmenge $R \subseteq A \times A$. Meistens werden Relationen mit einem Symbol bezeichnet (z. B. “$\sim$“), das man zwischen zwei Elemente $a, b \in A$ schreibt (also z. B. „$a \sim b$“), um auszudrücken, dass $(a, b) \in R$ ist.*

(b) *Eine **Äquivalenzrelation** $\sim$ auf $A$ ist eine Relation $\sim$ auf $A$ mit folgenden Eigenschaften:*

(i) $\forall a \in A\colon a \sim a$ *(**Reflexivität**)*
(ii) $\forall a, b \in A\colon (a \sim b \Rightarrow b \sim a)$ *(**Symmetrie**)*
(iii) $\forall a, b, c \in A\colon (a \sim b \wedge b \sim c \Rightarrow a \sim c)$ *(**Transitivität**)*
*Ist dies der Fall, so wird „$a \sim b$“ oft ausgesprochen als „$a$ ist **äquivalent** zu $b$“ oder „$a$ und $b$ sind **äquivalent**“.*

(c) *Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $A$ und ist $a \in A$, so nennt man $\{b \in A \mid b \sim a\}$ die **Äquivalenzklasse** von $a$. Die Menge all dieser Äquivalenzklassen wird mit $A/\sim$ bezeichnet; dies wird „$A$ **modulo** $\sim$“ ausgesprochen. ($A/\sim$ ist also eine Menge von Mengen.)*

**Beispiel 1.4.2** *Sind $a, m \in \mathbb{Z}$ und $m \neq 0$, so schreiben wir „$m \mid a$“ für: „$a$ ist durch $m$ **teilbar**.“ (D. h.: $\frac{a}{m}$ ist eine ganze Zahl.) Man sagt auch: $m$ **teilt** $a$.*

*Sei nun $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dann wird durch*

$$a \sim b :\iff m \mid a - b$$

*eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ definiert. Die übliche Notation für diese Relation ist „$a \equiv b \mod m$“; man sagt: „$a$ ist **kongruent** zu $b$ modulo $m$“ oder „$a$ und $b$ sind **kongruent** modulo $m$“.*

**Lemma 1.4.3** *Sei $A$ eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $A$. Dann gilt, für $a, b \in A$:*

(a) $a \in a/\sim$
(b) $a \sim b \iff a/\sim = b/\sim$

**Definition 1.4.4** *Eine **Partition** einer Menge $A$ ist eine Menge $P$ von nichtleeren Teilmengen von $A$, so dass es für jedes $a \in A$ genau ein $B \in P$ gibt mit $a \in B$.*

**Satz 1.4.5** *Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge $A$, so ist $A/\sim$ eine Partition von $A$.*

# 2 Algebraische Strukturen

## 2.1 Gruppen, Ringe, Körper

**Definition 2.1.1** (a) *Eine **Gruppe** ist ein Tripel $(G, \circ, e)$ bestehend aus einer Menge $G$, einer Abbildung $\circ\colon G \times G \to G$ und einem Element $e \in G$ mit folgenden Eigentschaften:*
(i) $\forall a, b, c \in G\colon (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ *(**Assoziativität**)*
(ii) $\forall a \in G\colon a \circ e = e \circ a = a$ *(Man sagt, „$e$ ist ein **neutrales Element** für $\circ$“.)*

(iii) $\forall a \in G\colon \exists b \in G\colon a \circ b = b \circ a = e$. *(Ein solches $b$ heißt* ***Inverses*** *von $a$.)*

*Die Bedingungen (i)–(iii) nennt man die* ***Gruppenaxiome****.*

(b) *Gilt außerdem $\forall a, b \in G\colon a \circ b = b \circ a$, so nennt man $G$* ***kommutativ*** *oder* ***abelsch****. (Gilt $a \circ b = b \circ a$, so sagt man auch: „$a$ und $b$* ***kommmutieren****“.)*

**Konvention 2.1.2** *Eine Abbildung, die man, wie das obige „$\circ$“, zwischen zwei Elemente schreibt, nennt man oft auch* ***Verknüpfung****.*

**Konvention 2.1.3** *Oft nennt man auch $(G, \circ)$ oder $G$ eine Gruppe, wenn klar ist, was $e$ (und $\circ$) sein soll. Man nennt $(\circ, e)$ auch eine* ***Gruppenstruktur*** *auf der Menge $G$. Man sagt auch: „Eine Gruppe ist eine Menge $G$ mit einer Verküpfung $\circ\colon G \times G \to G$ und einem Element $e \in G \ldots$“.*

**Beispiel 2.1.4** *Ist $A$ eine beliebige Menge, so bildet die Menge aller Bijektion von von $A$ nach $A$ eine Gruppe, mit der Verkettung von Abbildungen als Verknüpfung und $\mathrm{id}_A$ als neutralem Element. Diese Gruppe wird auch mit $\mathrm{Sym}(A)$ bezeichnet und die* ***symmetrische Gruppe*** *(auf $A$) genannt.*

**Bemerkung 2.1.5** *Beim Rechnen in einer Gruppe $G$ kann man „kürzen“: Aus $a \circ b = a' \circ b$ folgt $a = a'$ (für $a, a', b \in G$); und aus $b \circ a = b \circ a'$ folgt auch $a = a'$.*

**Lemma 2.1.6** *Ist $G$ eine Gruppe und $a \in G$, so existiert genau ein $b \in G$ mit $a \circ b = e$. Insbesondere hat $a$ genau ein Inverses.*

**Notation 2.1.7** *Es gibt mehrere verschiedene typische Notationen für Gruppen; im Folgenden sind $a, b$ Gruppenelemente und $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:*

(a) *Verknüpfung: $a \circ b$; neutrales Element: $e$; Inverses von $a$: $a^{-1}$. Wir definieren auch $a^0 := e$, $a^n := \underbrace{a \circ \cdots \circ a}_{n \text{ mal}}$, $a^{-n} := (a^{-1})^n$*

(b) ***Multiplikative Notation****: Verknüpfung: $a \cdot b$ (oder $ab$); neutrales Element: $1$; Inverses von $a$: $a^{-1}$. Wir definieren auch $\frac{a}{b} := a \cdot b^{-1}$, $a^0 := e$, $a^n := \underbrace{a \cdots a}_{n \text{ mal}}$, $a^{-n} := (a^{-1})^n$*

(c) ***Additive Notation****: Verknüpfung: $a + b$; neutrales Element: $0$; Inverses von $a$: $-a$. Wir definieren auch $a - b := a + (-b)$, $0 \cdot a := 0$, $n \cdot a := \underbrace{a + \cdots + a}_{n \text{ mal}}$, $(-n) \cdot a := n \cdot (-a)$*

*Wenn nicht anders angegeben, verwenden wir Notation (a).*

**Bemerkung 2.1.8** *Ist $G$ eine Gruppe, so gilt für beliebige $a, b \in G$ und $m, n \in \mathbb{Z}$:*

(a) $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$

(b) $a^{m+n} = a^m \circ a^n$

**Satz 2.1.9** *Sind $(G_1, \circ, e_1), \ldots, (G_n, \circ, e_n)$ Gruppen, so ist auch $G_1 \times \cdots \times G_n$ eine Gruppe, mit der* ***komponentenweisen Verknüpfung***

$$(a_1, \ldots, a_n) \circ (b_1, \ldots, b_n) := (a_1 \circ b_1, \ldots, a_n \circ b_n)$$

*und mit neutralem Element $(e_1, \ldots, e_n)$.*

Bemerkung: Wenn wir ein kartesisches Produkt $G_1 \times \cdots \times G_n$ als Gruppe bezeichnen, ist als Verknüpfung die komponentenweise Verknüpfung gemeint (wenn nicht anders angegeben). Diese Verknüpfung wird mit gleichen Symbol wie die Verknüpfungen der $G_i$ geschrieben.

**Definition 2.1.10** (a) *Ein* ***Ring*** *ist eine Menge $R$ mit zwei Verknüpfungen $+\colon R \times R \to R$ und $\cdot\colon R \times R \to R$ und mit Elementen $0 \in R$ und $1 \in R$, so dass die folgenden* ***Ringaxiome*** *gelten:*

(i) *$(R, +, 0)$ ist eine abelsche Gruppe.*

(ii) *$\cdot$ ist assoziativ und $1$ ist ein neutrales Element für $\cdot$.*

(iii) $\forall a, b, c \in R\colon \big((a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \ \wedge \ a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c\big)$ *(****Distributivität****)*

(b) *Der Ring $R$ heißt* ***kommutativ****, wenn die Verknüpfung $\cdot$ kommutativ ist.*

(c) *Ein* ***Körper*** *ist ein Ring $K$, bei dem $(K \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ eine abelsche Gruppe ist.*

(d) *Man nennt $0$ auch das* ***Null-Element*** *von $R$ und $1$ das* ***Eins-Element****.*

**Konvention 2.1.11** (a) *Wenn wir einen Ring $R$ als Gruppe auffassen, ist $(R, +)$ gemeint.*

(b) *Ist $K$ ein Körper, so setzen wir $K^\times := K \setminus \{0\}$ und fassen dies als Gruppe mit $\cdot$ als Verknüpfung auf.*

**Bemerkung 2.1.12** *Ist $K$ ein Körper, so gilt für alle $a, b \in K$:*

(a) $ab = 0 \iff (a = 0 \vee b = 0)$

(b) $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$

**Bemerkung 2.1.13** *Sei $K$ ein Körper. Fast im gesamten Abschnitt 1.1 kann man „reelle Zahl“ durch „Element von $K$“ ersetzen:*

(a) *Sind $a_1, \ldots, a_n, b \in K$, so nennt man „$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$“ eine* ***lineare Gleichung über*** *$K$ (Definition 1.1.4). Analog definiert man ein* ***lineares Gleichungssystem über*** *$K$ (Definition 1.1.8).*

(b) *Koeffizientenmatrix, elementare Tranformation und Zeilenstufenform werden auch entsprechend definiert (Definitionen 1.1.9, 1.1.12, 1.1.15), wobei mit $0$ und $1$ jeweils das entsprechende Element von $K$ gemeint ist.*

(c) *Mit einer Ausnahme gelten alle Aussagen aus Abschnitt 1.1 für beliebige Körper $K$: Lemma 1.1.10, Lemma 1.1.11, Lemma 1.1.13, Satz 1.1.14, Satz 1.1.16 (Gauß-Elimination), Satz 1.1.17.*

(d) *Die Ausnahme ist Korollar 1.1.18: Dieses muss wie folgt umformuliert werden: Sei $\underline{L}$ ein lineares Gleichungssystem über $K$ mit mehr Variablen als Gleichungen. Hat $\underline{L}$ mindestens eine Lösung (dies gilt insbesondere, wenn $\underline{L}$ homogen ist), so hat $\underline{L}$ sogar mindestens $\#K$ viele Lösungen.*

## 2.2 Unter- und Quotientenobjekte

**Definition 2.2.1** (a) *Sei $(G, \circ, e)$ eine Gruppe. Ist $H \subseteq G$ eine Teilmenge, so dass $(H, \circ|_{H\times H}, e)$ auch eine Gruppe ist, so nennt man $H$ eine **Untergruppe** von $G$ und $G$ eine **Obergruppe** von $H$.*
(b) *Analog definert man **Unter-** und **Oberringe** und **Unter-** und **Oberkörper**.*

**Beispiel 2.2.2** *Ist $(G, +)$ eine abelsche Gruppe und $n \in \mathbb{N}$, so ist*

$$nG := \{na \mid a \in G\}$$

*eine Untergruppe von $G$.*

**Bemerkung 2.2.3** (a) *Möchte man prüfen, dass eine Teilmenge $H$ einer Gruppe $G$ eine Untergruppe ist, so reicht es, folgendes zu prüfen:*
(i) *$e \in H$*
(ii) *$H$ ist **abgeschlossen unter** der Verknüpfung, d. h. sind $a, b \in H$, so ist auch $a \circ b \in H$.*
(iii) *$H$ ist **abgeschlossen unter** Inversen, d. h. ist $a \in H$, so ist auch $a^{-1} \in H$.*
(b) *Analoges gilt für Unterringe und Unterkörper.*

**Definition 2.2.4** *Sei $(G, +)$ eine abelsche Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Dann setzen wir $G/H := G/\sim$ (Aussprache: „$G$ **modulo** $H$“), wobei $\sim$ die Äquivalenzrelation ist, die definiert ist durch*

$$a \sim b \iff a - b \in H.$$

*Für die Äquivalenzklasse $a/\sim \in H$ eines Elements $a \in G$ schreibt oft $a + H$ oder $\bar{a}$. Man nennt $a$ auch einen **Repräsentanten** von $\bar{a}$, und die Abbildung $G \to G/H, a \mapsto \bar{a}$ nennt man die „**kanonische Abbildung** von $G$ nach $G/H$“.*

**Satz 2.2.5** *Ist $(G, +, 0)$ eine abelsche Gruppe und $H$ eine Untergruppe, so ist auch $G/H$ eine Gruppe mit der Verknüpfung*

$$\bar{a} + \bar{b} := \overline{a + b}$$

*und mit neutralem Element $\bar{0}$. (Man nennt $G/H$ eine **Quotientengruppe**.)*

**Satz 2.2.6** *Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dann ist $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ein kommutativer Ring, mit der Multiplikation*

$$\bar{a} \cdot \bar{b} := \overline{a \cdot b}$$

*und mit Eins-Element $\bar{1}$. ($\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist ein **Quotientenring**.)*

**Satz 2.2.7** *Ist $p$ eine Primzahl, so ist der Ring $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sogar ein Körper.*

**Definition 2.2.8** *Der Körper $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (für $p$ prim) wird mit $\mathbb{F}_p$ bezeichnet. Die Elemente von $\mathbb{F}_p$ werden mit $0, 1, \ldots, n-1$ bezeichnet (statt mit $\bar{0}$, $\bar{1}$, …, $\overline{n-1}$).*

## 2.3 Die komplexen Zahlen

**Definition 2.3.1** (a) *Die **komplexen Zahlen** $\mathbb{C}$ sind wie folgt definiert: Als Gruppe setzen wir $(\mathbb{C}, +) := (\mathbb{R}^2, +)$. Das Produkt von zwei komplexen Zahlen $(a, b), (c, d) \in \mathbb{C}$ ist definiert durch $(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc)$.*
(b) *Der **Betrag** einer komplexen Zahl $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ ist $|z| := \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}$.*

**Satz 2.3.2** (a) *Die komplexen Zahlen bilden einen Körper mit Eins-Element $(1, 0)$.*
(b) *Für $z, z' \in \mathbb{C}$ gilt: $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$.*

**Konvention 2.3.3** *Wir fassen $\mathbb{R}$ als Unterkörper von $\mathbb{C}$ auf, indem wir $a \in \mathbb{R}$ mit $(a, 0) \in \mathbb{C}$ identifizieren. (Diese Identifikation ist mit Addition und Multiplikation kompatibel.) Die komplexe Zahl $(0, 1) \in \mathbb{C}$ wird mit $i$ bezeichnet. So lässt sich jede komplexe Zahl $(a, b) \in \mathbb{C}$ schreiben als $a + bi$ (für $a, b \in \mathbb{R}$).*

**Definition 2.3.4** *Sei $z = a + ib \in \mathbb{C}$.*

(a) *Der **Realteil** von $z$ ist $\mathrm{Re}(z) := a$, der **Imaginärteil** ist $\mathrm{Im}(z) := b$.*
(b) *Das **(komplex) Konjugierte** von $z$ ist $\bar{z} := a - ib$.*

**Satz 2.3.5** *Für $z, z' \in \mathbb{C}$ gilt:*

(a) $\bar{\bar{z}} = z$
(b) $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$.
(c) $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$
(d) $\overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z'}$
(e) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$
(f) $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$

## 2.4 Polynomringe

**Notation 2.4.1** *Sei $(G, +, 0)$ eine abelsche Gruppe.*

(a) *Sind $m \leq n$ zwei ganze Zahlen und sind $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n \in G$, so setzen wir*

$$\sum_{i=m}^{n} a_i := a_m + a_{m+1} \cdots + a_n.$$

(b) *Sei $I$ eine Index-Menge und seien $a_i \in G$ (für $i \in I$) so, dass $a_i = 0$ ist für fast alle $i \in I$. Dann schreiben wir*

$$\sum_{i \in I} a_i$$

*für die Summe all derjenigen $a_i$, die nicht 0 sind.*

**Definition 2.4.2** *Sei $R$ ein kommutativer Ring und $x$ eine Variable.*

(a) *Ein **Polynom** in $x$ über $R$ ist gegeben durch ein Tupel $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in R^{\mathbb{N}}$, wobei fast alle $a_i$ gleich 0 sind. Wir schreiben ein solches Polynom als Term der Form*

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i x^i$$

*Die Menge aller Polynome in $x$ über $R$ wird mit $R[x]$ bezeichnet.*

(b) *Die Summe und das Produkt von zwei Polynomen $\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i x^i, \sum_{i \in \mathbb{N}} b_i x^i \in R[x]$ sind so definiert, wie es die Term-Notation suggeriert:*

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i x^i + \sum_{i \in \mathbb{N}} b_i x^i := \sum_{i \in \mathbb{N}} (a_i + b_i) x^i$$

$$\left( \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i x^i \right) \cdot \left( \sum_{i \in \mathbb{N}} b_i x^i \right) := \sum_{i \in \mathbb{N}} \left( \sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j} \right) x^i$$

**Satz 2.4.3** *Ist $R$ ein kommutativer Ring, so ist auch $R[x]$ ist ein kommutativer Ring.*

**Konvention 2.4.4** *Wir fassen einen kommutativen Ring $R$ als Unterring von $R[x]$ auf, indem wir ein Element $a \in R$ mit dem Polynom $ax^0 \in R[x]$ identifizieren.*

**Notation 2.4.5** *Ist $M = \{a_1, \ldots, a_n\}$ eine endliche Menge von reellen Zahlen, so bezeichnet $\min M$ das kleinste Element von $M$ und $\max M$ das größte Element von $M$ (also $\min M, \max M \in M$, und für alle $1 \leq i \leq n$ gilt: $\min M \leq a_i \leq \max M$).*

**Definition 2.4.6** *Sei $R$ ein Ring und $f = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n \in R[x] \setminus \{0\}$ ein Polynom über $R$.*

(a) *Der **Grad** von $f$ ist definiert als $\deg f := \max\{i \in \mathbb{N} \mid a_i \neq 0\}$.*

(b) *Ist $a_{\deg f} = 1$, so nennt man $f$ **normiert**.*

**Satz 2.4.7** *Sei $R$ ein kommutativer Ring und seien $f, g \in R[x] \setminus \{0\}$. Dann ist* $\deg(f \cdot g) \leq \deg f + \deg g$. *Ist $R$ ein Körper, so gilt sogar* $\deg(f \cdot g) = \deg f + \deg g$.

**Definition 2.4.8** *Sei $R$ ein Ring und $f = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n \in R[x]$ ein Polynom über $R$.*

(a) *Das Polynom $f$ definiert eine Funktion von $R$ nach $R$, die auch mit $f$ bezeichnet wird: $f(b) := \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n b^n$. Hierbei verwenden wir die Konvention $0^0 := 1$.*
(b) *Eine **Nullstelle** von $f$ ist ein Element $b \in R$ mit $f(b) = 0$.*

**Bemerkung 2.4.9** *Ist $R$ ein kommutativer Ring, sind $f, g \in R[x]$ und ist $a \in R$, so gilt: $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$ und $(f \cdot g)(a) = f(a) \cdot g(a)$.*

**Satz 2.4.10** *Ist $R$ ein kommutativer Ring, $f \in R[x] \setminus \{0\}$ und ist $b \in R$ eine Nullstelle von $f$, so gibt es ein $g \in R[x]$ mit $f = (x - b) \cdot g$.*

**Korollar 2.4.11** *Ist $K$ ein Körper und $f \in K[x] \setminus \{0\}$, so hat $f$ maximal* $\deg f$ *verschiedene Nullstellen.*

**Satz 2.4.12 (Fundamentalsatz der Algebra)** *Ist $f \in \mathbb{C}[x]$ und* $\deg f \geq 1$, *so besitzt $f$ mindestens eine Nullstelle.*

**Korollar 2.4.13** *Ist $f \in \mathbb{C}[x]$ ein normiertes Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$, so existieren $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ so dass $f = \prod_{i=1}^{n} (x - a_i)$ gilt. Die Menge $\{a_1, \ldots, a_n\}$ ist genau die Menge der Nullstellen von $f$. (Allerdings kann die selbe Nullstelle mehrfach auftauchen.)*

# 3 Vektorräume

## 3.1 Definition

Im Folgenden sei $K$ ein Körper.

**Definition 3.1.1** *Ein **Vektorraum** über $K$ (auch: ein $K$-**Vektorraum**) ist eine abelsche Gruppe $(V, +)$, zusammen mit einer Verknüpfung $\cdot \colon K \times V \to V$, so dass für alle $r, s \in K$ und alle $u, v \in V$ gilt:*

(a) $r \cdot (u + v) = r \cdot u + r \cdot v$
(b) $(r + s) \cdot v = r \cdot v + s \cdot v$
(c) $(r \cdot s) \cdot v = r \cdot (s \cdot v)$
(d) $1 \cdot v = v$

*Die Elemente von $V$ nennt man **Vektoren**, die Elemente von $K$ nennt man **Skalare**; $+$ heißt **Vektoraddition**, $\cdot$ heißt **Skalarmultiplikation**. Das Element $0 \in V$ nennt man **Nullvektor**.*

**Beispiel 3.1.2** *$K^n$ ist ein Vektorraum mit der Skalarmultiplikation*

$$r \cdot (a_1, \ldots, a_n) := (ra_1, \ldots, ra_n).$$

*Elemente von $K^n$ werden oft* $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ *geschrieben (statt $(a_1, \ldots, a_n)$).*

**Beispiel 3.1.3** *$K[x]$ ist ein Vektorraum über $K$.*

**Beispiel 3.1.4** *Ist $A$ eine beliebige Menge, so ist $\mathrm{Abb}(A, K)$ ein $K$-Vektorraum, mit **punktweiser Vektorraddition** und **punktweiser Skalarmultiplikation**: $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$ und $(r \cdot f)(a) = r \cdot (f(a))$ für alle $f, g \in \mathrm{Abb}(A, K)$, alle $r \in K$ und alle $a \in A$.*

**Satz 3.1.5** *Ist $V$ ein $K$-Vektorraum, so gilt für alle $r \in K$ und alle $v \in V$:*

(a) $r \cdot v = 0 \iff (r = 0 \vee v = 0)$
(b) $(-1) \cdot v = -v$.

## 3.2 Untervektorräume

Sei weiterhin $K$ ein Körper.

**Definition 3.2.1** *Sei $(V, +, 0, \cdot)$ ein $K$-Vektorraum. Ist $U \subseteq V$ eine Teilmenge, so dass $(U, +|_{U \times U}, 0, \cdot|_{K \times U})$ auch ein Vektorraum ist, so nennt man $U$ einen **Untervektorraum** von $V$.*

**Lemma 3.2.2** *Eine Teilmenge $U$ eines $K$-Vektorraums $V$ ist ein Untervektorraum genau dann, wenn sie nicht leer ist und für alle $u, u' \in U$ und alle $r \in K$ gilt: $ru + u' \in U$.*

**Beispiel 3.2.3** *Ist $\underline{L}$ ein homogenes lineares Gleichungssystem über $K$ in $n$ Variablen, so ist die Lösungsmenge von $\underline{L}$ ein Untervektorraum von $K^n$.*

**Bemerkung 3.2.4** *Wir werden später sehen: Jeder Untervektorraum von $K^n$ lässt sich als Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems über $K$ schreiben.*

**Definition 3.2.5** *Sei $V$ ein $K$-Vektorraum, sei $I$ eine Index-Menge und sei $v_i \in V$ für alle $i \in I$.*

(a) *Eine „**Linearkombination** der Vektoren $v_i$ für $i \in I$“ ist ein Vektor, der sich in der Form*

$$\sum_{i \in I} r_i \cdot v_i,$$

*schreiben lässt, wobei die $r_i \in K$ Skalare sind, die fast alle $0$ sind. Sind nicht alle $r_i = 0$, so nennt man die Linearkombination **nicht-trivial**.*

(b) *Die Menge aller Linearkombinationen der Vektoren $v_i$ wird mit $\langle v_i \mid i \in I \rangle_K$ bezeichnet; man nennt dies die **lineare Hülle** (oder den **Span** oder das **Erzeugnis**) der Vektoren $v_i$. Andere Notationen dafür: Ist $A = \{v_i \mid i \in I\}$, so schreibt man auch $\langle A \rangle_K$ statt $\langle v_i \mid i \in I \rangle_K$; ist $I = \{1, \ldots, n\}$, so schreibt man auch $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle_K$.*

(c) *Gilt $\langle v_i \mid i \in I \rangle_K = V$, so nennt man die Vektoren $v_i$ ein **Erzeugendensystem** von $V$.*

**Satz 3.2.6** *Ist $V$ ein $K$-Vektorraum und $A \subseteq V$ eine beliebige Teilmenge. Dann ist $\langle A \rangle_K$ der kleinste Untervektorraum von $V$, der $A$ enthält. Mit „kleinste“ ist gemeint: Ist $U \subseteq V$ ein beliebiger Untervektorraum, der $A$ enthält, so ist $\langle A \rangle_K \subseteq V$.*

**Korollar 3.2.7** *Ist $V$ ein $K$-Vektorraum, $A \subseteq V$ und $B \subseteq \langle A \rangle_K$, so ist $\langle A \cup B \rangle_K = \langle A \rangle_K$.*

## 3.3 Lineare Unabhängigkeit

Sei weiterhin $K$ ein Körper, und sei außerdem $V$ ein $K$-Vektorraum.

**Definition 3.3.1** *Sei $I$ eine Indexmenge und sei $(v_i)_i \in V^I$ ein Tupel von Vektoren.*

(a) *Eine nicht-triviale Linearkombination der Vektoren $v_i$, die gleich $0$ ist, nennt man auch eine **lineare Abhängigkeit** zwischen den Vektoren $v_i$.*

(b) *Existiert eine lineare Abhängigkeit zwischen den Vektoren $v_i$, so nennt man sie **linear abhängig**, sonst **linear unabhängig**.*

**Lemma 3.3.2** *Seien $v_1, \ldots, v_n \in V$. Ist $\sum_{i=1}^{n} r_i v_i = 0$ eine lineare Abhängigkeit mit $r_n \neq 0$, so ist $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle_K = \langle v_1, \ldots, v_{n-1} \rangle_K$.*

**Satz 3.3.3** *Seien $v_1, \ldots, v_{n-1} \in V$ linear unabhängig und sei $v_n \in V \setminus \langle v_1, \ldots, v_{n-1} \rangle_K$. Dann sind auch $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig.*

## 3.4 Basis und Dimension

Sei weiterhin $K$ ein Körper und $V$ ein $K$-Vektorraum.

**Definition 3.4.1** *Ein Tupel $(v_i)_{i\in I}$ von Vektoren $v_i \in V$ nennt man **Basis** von $V$, wenn es linear unabhängig ist und $V$ erzeugt.*

**Beispiel 3.4.2** *In $K^n$ bilden die Vektoren*

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

*eine Basis, die **Standardbasis**.*

**Satz 3.4.3** *Seien $v_1, \ldots, v_n \in V$. Dann sind äquivalent:*

(a) *$v_1, \ldots, v_n$ ist eine Basis von $V$.*
(b) *$v_1, \ldots, v_n$ ist ein minimales Erzeugendensystem von $V$, d. h. $\langle v_1, \ldots, v_n\rangle_K = V$, aber für jedes $i \leq n$ gilt: $\langle v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n\rangle_K \neq V$.*
(c) *$(v_1, \ldots, v_n)$ ist ein maximales linear unabhängiges Tupel, d. h. $(v_1, \ldots, v_n)$ ist linear unabhängig, aber für jeden weiteren Vektor $v_{n+1} \in V$ ist das Tupel $(v_1, \ldots, v_{n+1})$ linear abhängig.*
(d) *Jeder Vektor $v \in V$ lässt sich auf eindeutige Weise als Linearkombintation der Vektoren $v_i$ schreiben, d. h. für jedes $v \in V$ existiert genau ein Tupel $(r_1, \ldots, r_n) \in K^n$, so dass $\sum_{i=1}^n r_i v_i = v$ gilt.*

**Korollar 3.4.4** *Ist $V$ ein Vektorraum mit einem endlichen Erzeugendensystem, so existiert eine Basis von $V$. Sind bereits linear unabhängige Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ gegegen, so existiert sogar eine Basis von $V$, die $v_1, \ldots, v_n$ enthält.*

**Bemerkung 3.4.5** *Es gilt sogar allgemeiner: Jeder Vektorraum besitzt eine Basis. (Ohne Beweis.)*

**Lemma 3.4.6** *Ist $v_1, \ldots, v_n \in V$ ein Erzeugendensystem von $V$ und sind $w_1, \ldots, w_m \in V$ beliebig mit $m > n$, so sind $w_1, \ldots, w_m$ linear abhängig.*

**Satz 3.4.7** *Sind $(v_i)_{i\in I}$ und $(w_j)_{j\in J}$ zwei Basen eines Vektorraums $V$, so gilt $\#I = \#J$.*

**Definition 3.4.8** *Die **Dimension** „$\dim V$“ von $V$ ist die Kardinalität einer (beliebigen) Basis von $V$. Ist $\dim V = n$, so sagt man auch „$V$ ist $n$-dimensional“. $V$ heißt **endlich dimensional** falls $\dim V \in \mathbb{N}$ und **unendlich dimensional** sonst.*

**Satz 3.4.9** *Ist $U \subseteq V$ ein Untervektorraum, so ist $\dim U \leq \dim V$.*