Vorlesung Lineare Algebra I

SoSe'24 hhu
K. Halupczok

§3: Vektorräume

L10: Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit, LGSe

Stichworte: Lineare Abh./Unabh., LGS, Lösungsmenge, homogenes/inhomogenes LGS, elementare (Zeilen)umformungen, nichttriv. Lösbarkeit: homogenes LGS, Lin. (un-)abh. Vektorenmengen

Ein zentraler Begriff der Linearen Algebra ist die Lineare Abhängigkeit bzw. Lineare Unabhängigkeit. Dieser führt uns dann zu (homogenen) linearen Gleichungssystemen.

10.1. Def.: • Lineare Unabhängigkeit: Vektoren $v_1, \ldots, v_m$ eines $\mathbb{K}$-VRs V heißen linear unabhängig, wenn die Gleichung $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = o$ nur die Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$ in $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{K}$ hat.

Genau: eine endliche Familie von Vektoren...

• Nicht linear unabhängige Vektoren $v_1, \ldots, v_m \in V$ heißen linear abhängig, d.h., wenn es Skalare $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{K}$ gibt, die nicht alle Null sind, so dass $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = o$ gilt.

10.2. Bem.: • Wir beachten die Quantoren:

$$v_1, \ldots, v_m \text{ lin. unabh.} :\Leftrightarrow \forall \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{K} : \left(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0 \Rightarrow \overbrace{\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0}^{\forall i \in \{1, \ldots, m\}: \lambda_i = 0}\right).$$

$$v_1, \ldots, v_m \text{ lin. abh.} :\Leftrightarrow \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{K} : \left(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0 \wedge \exists i \in \{1, \ldots, m\} : \lambda_i \neq 0\right).$$

• Ist einer der Vektoren $v_1, \ldots, v_m$ der Nullvektor o, so sind sie lin. abhängig. Ebenso, wenn zwei der Vektoren gleich sind (ist $v_i = v_j$, gilt $1 \cdot v_i + (-1) \cdot v_j = 0$).

• Ein (einzelner) Vektor v ist genau dann linear abhängig, wenn er der Nullvektor o ist.

Genau: eine endliche Familie $v_1, \ldots, v_m$ von Vektoren...

• Die Vektoren $v_1, \ldots, v_m$ mit $m \geq 2$ sind genau dann lin. abhängig, wenn einer von ihnen Linearkombination der anderen ist. Dies ist ein Kor. aus Lemma 10.21.

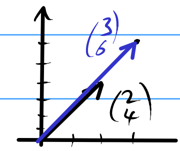
• Die Vektoren $v_1, \ldots, v_m$ mit $m \geq 2$ sind genau dann lin. unabhängig, wenn sich der Nullvektor o nur durch $o = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \ldots + 0 \cdot v_m$ als Linearkombination von $v_1, \ldots, v_m$ ausdrücken lässt.

• Wir schreiben auch $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i$ für die Linearkombination (Kurz: LK) $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m$.

• Wir behandeln zum Begriff "linear (un-)abh." zunächst nur endliche Familien von Vektoren.

10.3. **Bsp.:** • Im $\mathbb{R}$-VR $\mathbb{R}^2$ sind $\binom{1}{0}, \binom{0}{1}$ lin. unabh., aber $\binom{2}{4}, \binom{3}{6}$ sind lin. abh., weil $3 \cdot \binom{2}{4} - 2 \cdot \binom{3}{6} = 0$.

$\binom{2}{4}, \binom{3}{6}$ zeigen in dieselbe "Richtung"



[die Glg. $\lambda_1 \binom{2}{4} + \lambda_2 \binom{3}{6} = \binom{0}{0}$ hat die Lösung $(\lambda_1, \lambda_2) = (3, -2) \neq (0,0)$]

• Auch $\binom{2}{4}, \binom{-1}{-2}$ sind lin. abh., weil $1 \cdot \binom{2}{4} + 2 \cdot \binom{-1}{-2} = 0$. (zeigen in entgegengesetzte Richtung.)

• Im $\mathbb{R}$-VR $\mathbb{R}^3$ sind $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\\4\end{pmatrix}$ lin. abh., weil $1 \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix}1\\4\\4\end{pmatrix} = 0$.

• Davon sind $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ linear unabhängig, da nur für $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ die LK $\lambda_1 \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ gleich 0 ergibt. Doch wie überprüft man das?

Wir reduzieren mit dem folgenden Satz das Problem der Überprüfung der Linearen (Un-)abhängigkeit von Vektoren im (bel.) VR V auf die Überprüfung dazu passender (Spalten-)Vektoren des $\mathbb{K}^n$:

10.4. **Satz:** Im $\mathbb{K}$-VR V seien $v_1, \dots, v_n$ lin. unabh. gegeben, und m viele Linearkombinationen
$$w_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i1} v_i, \quad w_2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i2} v_i, \dots, w_m = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{im} v_i.$$
Die Vektoren $w_1, \dots, w_m$ aus V sind genau dann linear unabhängig, wenn die Spaltenvektoren $\begin{pmatrix}\alpha_{11}\\ \alpha_{21}\\ \vdots \\ \alpha_{n1}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha_{12}\\ \alpha_{22}\\ \vdots \\ \alpha_{n2}\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}\alpha_{1m}\\ \alpha_{2m}\\ \vdots \\ \alpha_{nm}\end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ lin. unabhängig (im $\mathbb{K}^n$) sind.

Bew.: Der Ansatz $\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_m w_m = 0$ führt auf
$$0 = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j w_j = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} v_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \alpha_{ij} \right) v_i.$$
Da $v_1, \dots, v_n$ lin. unabh., gilt $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \alpha_{ij} = 0$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$,
d.h. $\lambda_1 \begin{pmatrix}\alpha_{11}\\ \vdots \\ \alpha_{n1}\end{pmatrix} + \dots + \lambda_m \begin{pmatrix}\alpha_{1m}\\ \vdots \\ \alpha_{nm}\end{pmatrix} = 0$.

Somit gilt: $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j w_j = 0 \iff \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \begin{pmatrix}\alpha_{1j}\\ \vdots \\ \alpha_{nj}\end{pmatrix} = 0.$ $\square$

10.5. **Bsp.:** In $V = \mathbb{R}[T]$ sind $1, T, T^2$ lin. unabh. Dann sind $p_1 = 2T^2 - 2T + 6$ und $p_2 = 3T^2 - 3T + 9$ lin. abh., weil $3 \cdot \begin{pmatrix}2\\-2\\6\end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix}3\\-3\\9\end{pmatrix} = 0$ ist.

Wie bestimmt man hier die Koeff. $3, -2$? Allgemein:

Wie überprüft man im Konkreten Fall die Lin. (Un-)Abhängigkeit für Vektoren des $\mathbb{K}^n$? Wir benötigen dafür Lineare Gleichungssysteme (LGS).

10.6. Def.: Ein Lineares Gleichungssystem (LGS) ist die ("$\wedge$"-) Zusammenfassung von n (linearen) Gleichungen $\alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \ldots + \alpha_{im}x_m = \beta_i$, $i \in \{1,\ldots,n\}$, die $\beta_i, \alpha_{ij} \in \mathbb{K}$, $j \in \{1,\ldots,m\}$, für $i \in \{1,\ldots,n\}$ mit (unbestimmten) Zahlen $x_1,\ldots,x_m \in \mathbb{K}$, zu einer math. Aussage. Gesucht sind Tupel $(x_1,\ldots,x_m) \in \mathbb{K}^m$, die alle diese Gleichungen gleichzeitig erfüllen. Jedes solche Tupel heißt Lösung des LGS. Alle Lösungen bilden die Lösungsmenge $\mathbb{L}$. (Jede der Gleichungen ist eine math. Aussage, die jeweils wahr oder falsch sein kann. Das LGS ist die Verknüpfung all dieser Aussagen mit $\wedge$ ("und") zu einer einzigen Aussage.)

Übliche Schreibweise eines LGS:

$$\begin{aligned} & \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1m}x_m = \beta_1 \\ \wedge\; & \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2m}x_m = \beta_2 \\ & \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \wedge\; & \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + \alpha_{nm}x_m = \beta_n \end{aligned}$$

(lässt man oft weg beim Schreiben) (n Zeilen, m Unbekannte)

- Die $\alpha_{ij} \in \mathbb{K}$ heißen die Koeffizienten des LGS.
- Die Variablen $x_1,\ldots,x_m$ heißen die Unbekannten / Unbestimmten des LGS.
- Die Zahlen $\beta_1,\ldots,\beta_n$ nennt man die rechten Seiten des LGS.
- Ist $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_n = 0$, heißt das LGS homogen, ansonsten inhomogen.

10.7. Bsp.: Die Überprüfung, ob $\begin{pmatrix}2\\-2\\6\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}3\\-3\\9\end{pmatrix}$ lin. unabh. sind, führt auf das homogene LGS

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 &= 0 \\ -2\lambda_1 - 3\lambda_2 &= 0 \\ 6\lambda_1 + 9\lambda_2 &= 0, \end{aligned}$$

welches außer $(\lambda_1,\lambda_2) = (0,0)$ z.B. noch das Lösungspaar $(\lambda_1,\lambda_2) = (3,-2)$ hat. (Die λ_1,λ_2 entsprechen den beiden Unbekannten ($m=2$), die in 10.6 $x_1,x_2,\ldots,x_m$ heißen; die Anzahl der Gleichungen ist die Komponentenanzahl der Vektoren, hier also $n=3$).

10.8. Lösungsstrategie für LGSe:

Wir formen komplette LGSe um in andere mit derselben Lösungsmenge. Dies machen wir solange, bis wir ein leicht lösbares erhalten und lösen es dann.

10.9 __Def.:__ Zwei LGSe heißen äquivalent, wenn ihre Lösungsmengen übereinstimmen.

Dazu geben wir folgende Regeln zur äquivalenten Umformung von LGSen an:

10.10 __Satz:__ Ein LGS wird in ein dazu äquivalentes LGS umgeformt, falls...

(A) ... zwei Gleichungen vertauscht werden,

(B) ... eine Gleichung mit einem Skalar $c \in \mathbb{K}$, $c \neq 0$, multipliziert wird,

(C) ... eine Gleichung zu einer anderen Gleichung addiert wird (und eine der beiden ursprünglichen Gleichungen beibehalten wird).

Oft fasst man (B) und (C) zu einer einzigen Regel zusammen, die (C) ersetzt:

(C') ... ein skalares Vielfache einer Gleichung (etwa das c-fache, $c \in \mathbb{K}$) wird zu einem skalaren Vielfachen einer anderen Gleichung (etwa das c'-fache, $c' \in \mathbb{K}$, $c' \neq 0$) addiert (das Ergebnis ersetzt diese andere Gleichung).

__Bew.:__ • Die Regeln (A) und (B) sind klar, da darin eine Gleichung in eine äquivalente Gleichung umgeformt wird. • Für (C) nennen wir die linken Seiten der zwei betreffenden Gleichungen μ_i und μ_j, und beachten, dass gilt:

$$\mu_i = \beta_i \wedge \mu_j = \beta_j \Leftrightarrow \mu_i = \beta_i \wedge \mu_i + \mu_j = \beta_i + \beta_j \qquad („\Rightarrow": \text{klar}, „\Leftarrow": \text{ziehe von der 2. Glg. } \mu_i = \beta_i \text{ ab}).$$

• Für (C'): Für $c=0$ ist (C') genau Regel (B) mit $c' \neq 0$. Für $c \neq 0$ nimm Regel (B) mit c, c' und Regel (C).

• Weiter beinhaltet Regel (C') die Regel (C), wenn $c = c' = 1$ genommen wird. □

10.11 __Def.:__ Die Umformungen (A), (B), (C), (C') heißen elementare Umformungen bzw. elementare Zeilenumformungen.

10.12 __Bem.:__ Es kommt in einem LGS nur auf die Koeffizienten α_{ij} (und die rechten Seiten bei inhomogenen LGSen) an. Schreibtechnisch ist es daher effektiv, nur noch die Koeffizienten (und ev. die rechten Seiten) aufzuschreiben, also in der Form

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1m} & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2m} & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nm} & 0 \end{array}\right] \text{ bzw. } \left[\begin{array}{cccc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1m} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2m} & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nm} & \beta_m \end{array}\right]$$

für das homogene bzw. inhomogene LGS in 10.6. (n Zeilen)

Die elem. Umformungen (A), (B), (C), (C') beschreiben in diesem rechteckigen Zahlenschema dann Umformungen von Zeilen (jede Zeile steht für eine Gleichung).

10.13. **Bsp.:** $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=3 \\ x_1-x_2+2x_3=2 \\ x_2+x_3=2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ |\cdot(-1) \\ \\ \end{matrix} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ |\cdot(-1) \\ \\ \end{matrix}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right]$ Aus einer Dreiecksform wie in $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right]$

kann nun die Lösungsmenge leicht bestimmt werden wie folgt.
Die "Zurückübersetzung" in die einzelnen Gleichungen hilft hier:
$x_1+x_2+x_3=3$ (Glg. I) $\wedge$ $x_2-2x_3=-1$ (Glg. II) $\wedge$ $3x_3=3$ (Glg. III).
Wir können dann schrittweise "von unten nach oben" die Gleichungen lösen:
Glg. III: $x_3=\underline{1}$, Glg. II: $x_2=2x_3-1=2\cdot1-1=\underline{1}$, Glg. I: $x_1=-x_2-x_3+3=-1-1+3=\underline{\underline{1}}$
Lösungsmenge: $\mathbb{L}=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$.

10.14. **Bsp.:** $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \underset{\sim}{2} & 0 \end{array}\right]$ In Glg. III: $x_3+2\lambda=0 \rightarrow x_3=-2\lambda$
In Glg. II: $x_2+3x_3+\lambda=0 \rightarrow x_2=-3\cdot(-2\lambda)-\lambda=5\lambda$
frei wählbar: $x_4=\lambda$ ("Parameter")

In Glg. I: $x_1+2x_3+3\lambda \rightarrow x_1=-2\cdot(-2\lambda)-3\lambda=\lambda$, also $\mathbb{L}=\{(\lambda,5\lambda,-2\lambda,\lambda);\lambda\in\mathbb{R}\}$.

10.15. **Bem.:** In Bsp. 10.14 würde man nicht mehr von einer Dreiecksform sprechen, sondern von einer Zeilenstufenform. Wie man diese systematisch erhält, behandeln wir genauer in L16. Einen Vorgeschmack liefert folgender Satz, der uns ein Kriterium für Lösungsmengen $\neq\{(0,\dots,0)\}$ in homogenen LGSen angibt.

10.16. **Satz:** Hat ein homogenes LGS mehr Unbekannte als Gleichungen, ist es nichttrivial lösbar, d.h. es gibt ein Lösungstupel $\neq(0,0,\dots,0)$.

Bem.: Im Fall des Satzes hat man dann wie in Bsp. 10.14 frei wählbare Parameter, die für nichttriviale Lösungstupel sorgen.

Bew.: Das homogene LGS habe n Gleichungen/Zeilen und m Unbekannte.
1. Schritt: Man darf $n=m-1$ annehmen. ⌈Denn hat man den Satz in diesem Fall bewiesen, so erhält man den Fall $m>n$, indem man das LGS mit willkürlichen Gleichungen ergänzt zum Fall $n=m-1$.⌋

2. Schritt: Man darf $\alpha_{11} \neq 0$ annehmen. ⌈Denn falls alle Koeffizienten α_{ij} gleich 0 sind, ist jedes $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{K}^m$ Lösung und die Beh. klar. Andernfalls ex. ein $\alpha_{ij} \neq 0$. Durch ev. Vertauschen der Unbekannten x_1 und x_j erreichen wir $\alpha_{i1} \neq 0$, und durch ev. Vertauschen der Glgn. Nr. 1 und i erreichen wir $\alpha_{11} \neq 0$. Die Existenz nichttrivialer Lösungen wird davon nicht berührt.⌋

3. Schritt: Man darf $\alpha_{21} = \alpha_{31} = \dots = \alpha_{n1} = 0$ annehmen. ⌈Denn: Man multipliziert die 1. Glg. der Reihe nach mit $-\alpha_{21}, -\alpha_{31}, \dots, -\alpha_{n1}$ und addiert das Ergebnis jeweils zu dem α_{11}-fachen der 2., 3., …, n. Glg. (Umformung (C′) in Satz 10.10, was die Lösungsmenge nicht ändert; $\alpha_{11} \neq 0$).⌋

4. Schritt: Beweis des Satzes durch vollständige Induktion nach n:

Ind.anfang: $m=2$, $n=1$: Die Glg. $\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 = 0$ mit $\alpha_{11} \neq 0$ hat z.B. die Lsg. $(x_1, x_2) = (-\alpha_{12}, \alpha_{11}) \neq (0,0)$.

Ind.schritt: $n-1 \rightsquigarrow n$: Die letzten $n-1$ Glg. sind nach dem 3. Schritt nur noch Glgn. in $x_2, \dots, x_m$. Mit $n < m \Leftrightarrow n-1 < m-1$ haben diese nach Induktionsvor. eine nichttriv. Lösung $(x_2, \dots, x_m)$. Dann ist auch $(\alpha_{11}x_2, \dots, \alpha_{11}x_m)$ wegen $\alpha_{11} \neq 0$ nichttriv. Lösung davon. Das Tupel $(-\alpha_{12}x_2 - \alpha_{13}x_3 - \dots - \alpha_{1m}x_m, \alpha_{11}x_2, \alpha_{11}x_3, \alpha_{11}x_4, \dots, \alpha_{11}x_m)$ ist somit ein nichttriviales Lösungstupel des Gesamt-LGS mit n Gleichungen. □

10.17 Bem.: Im Satz 10.16 wird nur benutzt, dass $\mathbb{K}$ keine Nullteiler besitzt (vgl. Lemma 7.23). Er gilt daher z.B. auch für $\mathbb{Z}$ anstelle $\mathbb{K}$.

10.18 Satz: In jedem VR sind m Linearkombinationen von n Vektoren $v_1, \dots, v_n$ stets linear abhängig, falls $m \geq n+1$.

Bew.: Es seien $w_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} v_i$ für $j = 1, \dots, m$ die fraglichen Linearkombinationen. Weil $n < m$ ist (d.h. mehr Unbekannte als Gleichungen vorliegen), hat das zugehörige homogene LGS* (wie in 10.6) ein Lösungstupel $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \neq (0, \dots, 0)$ nach Satz 10.16. Mit Satz 10.4 folgt die Beh. □

*nämlich $\forall i \leq n$: $\alpha_{i1}\lambda_1 + \dots + \alpha_{im}\lambda_m = 0$

Wir übertragen jetzt unsere Def. "lin. (un-)abh." auf beliebige Teilmengen von Vektorräumen, so dass wir nicht immer nur endliche Familien von Vektoren zu betrachten haben.

Lineare Unabhängigkeit von Vektormengen:

10.19. Def.: Eine Teilmenge S eines VRs V heißt linear unabhängig, wenn je endlich viele Vektoren aus S linear unabhängig sind. Andernfalls heißt S linear abhängig, d.h. wenn es (paarweise) verschiedene Vektoren $v_1, \dots, v_m \in S$, $m \in \mathbb{N}$, gibt, die linear abhängig sind.

10.20. Bem.: 1.) S ist genau dann linear unabhängig, wenn $S = \emptyset$ oder $S \neq \emptyset$ und für jedes $m \in \mathbb{N}$ alle paarweise verschiedenen Vektoren $v_1, \dots, v_m \in S$ lin. unabh. sind.

Bsp.: $\{1, T, T^2, \dots\} \subseteq \mathbb{R}[T]$ ist lin. unabh. Teilmenge von $\mathbb{R}[T]$ und unendlich groß.

2.) Gilt $o \in S$ (der Nullvektor), so ist S lin. abh. (z.B. $\{o\}$)

3.) Jede Obermenge einer lin. abh. Menge ist lin. abh.

Jede Teilmenge einer lin. unabh. Menge ist lin. unabh.

Es gelten weiter die folgenden nützlichen Lemmas:

10.21. Abhängigkeitslemma: Sind $v_1, \dots, v_m$ linear unabhängig und sind $v_1, \dots, v_m, x$ linear abhängig, so ist $x \in L(v_1, \dots, v_m)$.

Bew.: Es gibt $(\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}) \neq (0, \dots, 0)$ mit $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i + \alpha_{m+1} x = o$.

Dabei gilt $\alpha_{m+1} \neq 0$, da sonst $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i = o$ mit mind. einem $\alpha_i \neq 0$ gelten würde im $\lightning$ zur lin. Unabh. von $v_1, \dots, v_m$. Also gilt $x = -\frac{1}{\alpha_{m+1}} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i \in L(v_1, \dots, v_m)$. □

10.22. Lemma: S ist genau dann lin. abh., wenn es ein $x \in S$ gibt mit $L(S) = L(S \setminus \{x\})$.

Bew.: „$\Rightarrow$“: Ist S lin. abh., ex. $v_1, \dots, v_m \in S$, $m \in \mathbb{N}$, die lin. abh. sind. • Für $m = 1$ gilt $v_1 = o$ und $L(S \setminus \{v_1\}) = L(S)$, vgl. Def. 9.18. • Für $m \geq 2$ ist nach 10.21 ein Vektor eine LK der anderen, sei dies etwa v_1. Ersetzen wir in jeder LK von Vektoren aus S, in der v_1 vorkommt, diesen Vektor durch die LK der Vektoren $v_2, \dots, v_m$, so erhalten wir $L(S) \subseteq L(S \setminus \{v_1\})$, und somit "=".

„$\Leftarrow$“: Umgekehrt ex. $v \in S$ mit $L(S) = L(S \setminus \{v\})$. • Ist $S \setminus \{v\} = \emptyset$, ist $v \in L(S) = L(S \setminus \{v\}) = L(\emptyset) = \{o\}$, also $v = o$. Nach 10.20.2.) ist S lin. abh. • Ist $S \setminus \{v\} \neq \emptyset$, so ist (nach Def. 9.18.) $v \in L(S) = L(S \setminus \{v\})$ eine LK von ($\exists$ p.w.v.) Vektoren $v_1, \dots, v_m \in S \setminus \{v\}$. Dann sind $v, v_1, \dots, v_m$ ebenfalls p.w.v. und außerdem lin. abh., also auch S. □