Vorlesung Lineare Algebra I

SoSe'24 hhu
K. Halupczok

§3: Vektorräume

L12: Summen- und Quotientenvektorräume

Stichworte: Dimension von UVRen, Dimensionsformel, direkte Summe, Vektoren in direkten Summen, QuotientenVRe, Parameterdarstellung affiner Räume

---

Wir studieren jetzt die Dimension von Untervektorräumen. Zunächst leuchtet ein, dass echte UVRe $U \neq V$ kleinere Dimension haben als der umgebende VR V. Dies zeigen wir in den nächsten beiden Sätzen.

12.1. Satz: Ein UVR U eines n-dim. VRs V hat eine Dimension $\dim U \leq n$.

Bew.: • U ist endl. erzeugt: Mit $\emptyset$ beginnend liefert der Basis-Ergänzungssatz 11.5.3) nach endl. vielen Schritten eine Basis von U, oder wir erhielten in U (und damit aber auch V) bel. große unabh. Familien, was in einem endl.dim. V nicht geht.
• Sei $(w_1, \ldots, w_k)$ Basis von U. Sie ist unabh. in V, nach Steinitz 11.5.4) ist dann $k \leq n$. □

12.2. Satz: Sei V ein n-dim. VR und U ein UVR. Dann gilt: $\dim U = n \Leftrightarrow U = V$.

Bew.: „$\Leftarrow$": klar, „$\Rightarrow$": Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von U und $x \in V$. Gilt $x \notin L(\mathcal{B}) = U$, so ist $\mathcal{B} \cup \{x\}$ linear unabh. (wäre $\mathcal{B} \cup \{x\}$ abh., wäre dies ein ↯ zu 10.21), im ↯ zu Hilfssatz 11.12. Also ist $V \subseteq L(\mathcal{B}) = U$, und damit $V = U$. □

Bem.: Für unendl. dim. VRe V ist die Ungl. $\dim U \leq \dim V$ trivial, aus $\dim U = \dim V$ folgt aber nicht notwendig $U = V$.

Spezielle UVRe hatten wir in 9.14 studiert, z.B. Summen $U_1 + U_2$ von UVRen U_1, U_2. Für ihre Dimension gilt eine besondere Formel:

12.3. Dimensionsformel für Summen von UVRen:
Seien U_1, U_2 UVRe des VRs V. Dann gilt:

$$\boxed{\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)}$$

12.4. **Bem.:** Vgl. Def. 9.14 für U_1+U_2, haben $U_1+U_2=L(U_1\cup U_2)$ laut Kor. 9.21.

12.5. Beweis: OE alle Dimensionen endlich, sei $m_1=\dim U_1$, $m_2=\dim U_2$.
Sei $(v_1,\dots,v_k)$ Basis von $U_1\cap U_2$ (ev. $k=0 \Leftrightarrow U_1\cap U_2=\{0\}$),
ergänze zu Basis $(v_1,\dots,v_k,u_{k+1},\dots,u_{m_1})$ von U_1
und Basis $(v_1,\dots,v_k,w_{k+1},\dots,w_{m_2})$ von U_2,
laut Basisergänzungssatz 11.5.3).
Dann: $U_1+U_2=L(v_1,\dots,v_k,u_{k+1},\dots,u_{m_1},w_{k+1},\dots,w_{m_2})$,
d.h. $\dim(U_1+U_2)\le m_1+(m_2-k)$.
Hier "=" statt "≤", weil die Vektoren $v_1,\dots,v_k,u_{k+1},\dots,u_{m_1},w_{k+1},\dots,w_{m_2}$ lin. unabh.
$\ulcorner \sum\lambda_i v_i+\sum\mu_j u_j+\sum\nu_\ell w_\ell=0 \Rightarrow v:=\sum\lambda_i v_i+\sum\mu_j u_j=-\sum\nu_\ell w_\ell\in U_1\cap U_2$
$\Rightarrow v=\sum\alpha_i v_i \Rightarrow 0=v-v=\sum(\alpha_i-\lambda_i)v_i-\sum\mu_j u_j \Rightarrow$ alle $\lambda_i=\alpha_i$, alle $\mu_j=0$
$\Rightarrow \sum\lambda_i v_i+\sum\nu_\ell w_\ell=0 \Rightarrow$ alle $\lambda_i=0$, alle $\nu_\ell=0 \lrcorner$ □

12.6. **Bsp.:** Sei $V=\mathbb{R}^3$, $U_1=L\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$, $U_2=L\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$. Dann: $\dim U_1=2$, $\dim U_2=1$, und $U_1+U_2=V$. Laut Dim.formel ist $3=\dim V=\dim U_1+\dim U_2-\dim(U_1\cap U_2)$ $=2+1-\dim(U_1\cap U_2)$, also folgt $\dim(U_1\cap U_2)=0$, d.h. $U_1\cap U_2=\{0\}$.

Laut Dimensionsformel sind UVRe U_1,U_2 mit $U_1\cap U_2=\{0\}$ daher interessant.
Wir kommen so zur direkten Summe von UVRen:

12.7 Def.: • Sind U_1,U_2 UVRe von V mit $U_1\cap U_2=\{0\}$,
so heißt die Vektorraumsumme U_1+U_2 direkt.
Schreiben dann: $U_1\oplus U_2:=U_1+U_2$.
• Sind $U_1,\dots,U_k$ $(k\ge 2)$ UVRe von V mit $\forall i$: $U_i\cap\left(\sum_{j\ne i}U_j\right)=\{0\}$,
so heißt $U_1+\dots+U_k$ direkt,
schreiben dann: $U_1\oplus\dots\oplus U_k=\bigoplus_{i=1}^{k}U_i:=U_1+\dots+U_k$.

12.8. **Bem.:** Spezialfall der Dimensionsformel für $\oplus$: $\dim U_1\oplus U_2=\dim U_1+\dim U_2$.

Ist $V = U_1 \oplus U_2$, dann ist die Darstellung von jedem $v \in V$ als $v = u_1 + u_2$ eindeutig, d.h. $u_1 + u_2 = \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2 \Rightarrow u_1 = \tilde{u}_1 \wedge u_2 = \tilde{u}_2$.
Dies ist der Spezialfall $k=2$ des folgenden Satzes:

12.9. **Satz:** Es seien $U_1, \dots, U_k$, $k \geq 2$, UVRe von V. Dann gilt:
Die Summe $U := U_1 + \dots + U_k$ ist genau dann direkt, wenn jeder Vektor $x \in U$ eine eindeutige Darstellung $x = x_1 + \dots + x_k$ mit $x_i \in U_i$ für $i = 1, \dots, k$ besitzt.

Bew.: „$\Rightarrow$": Sei $U = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$ (direkt) und sei $x = x_1 + \dots + x_k = \tilde{x}_1 + \dots + \tilde{x}_k$ mit $x_i, \tilde{x}_i \in U_i$ für jedes $i = 1, \dots, k$. Dann folgt $(x_1 - \tilde{x}_1) + \dots + (x_k - \tilde{x}_k) = o$,
also $\underbrace{x_i - \hat{x}_i}_{\in U_i} = \underbrace{\sum_{j \neq i} (\hat{x}_j - x_j)}_{\in \sum_{j \neq i} U_j}$. Wegen $U_i \cap \sum_{j \neq i} U_j = \{o\}$ ist dies $= o$, somit ist $x_i = \tilde{x}_i$ für jedes i.

„$\Leftarrow$": Zeigen die Kontraposition:
Sei die Summe $U_1 + \dots + U_k$ nicht direkt. Es gibt somit ein $i \in \{1, \dots, k\}$ mit $U_i \cap \sum_{j \neq i} U_j \neq \{o\}$. Sei $x_i \neq o$ aus diesem Durchschnitt. Dann gilt $x_i = x_1 + \dots + x_{i-1} + o + x_{i+1} + \dots + x_k$ mit $x_j \in U_j$ für $j \in \{1, \dots, k\} \setminus \{i\}$, und da auch $x_i = o + \dots + o + x_i + o + \dots + o$, ist die verlangte Darst. von x_i nicht eindeutig. □

12.10. **Def.:** Sei V ein VR und U, W UVRe von V. Gilt $U \oplus W = V$, so heißen U und W komplementäre UVRe. Genau: W heißt Komplementärraum von U und ebenso heißt U Komplementärraum von W.

Bem.: Jeder UVR besitzt einen Komplementärraum:

12.11. **Satz:** Sei V ein VR und U ein UVR von V. Dann gibt es einen zu U komplementären UVR.

Bew.: Ergänzen eine Basis B von U zu einer Basis $B \cup B'$ von V, klar: $B \cap B' = \emptyset$.
Dann ist $W = L((B \cup B') \setminus B) = L(B')$ ein solcher Komplementärraum: • $U + W = L(B) + L(B') \overset{9.20}{=} L(B \cup B') = V$, • $x \in L(B) \cap L(B') \Rightarrow x = \sum \lambda_i b_i = \sum \mu_j b_j' \Rightarrow o = \sum \lambda_i b_i + \sum (-\mu_j) b_j'$
$\Rightarrow$ alle $\lambda_i = 0$, alle $\mu_j = 0$ da $B \cup B'$ lin. unabh. $\Rightarrow x = o$. □

12.12. **Bem.:** • In endl.-dim. VRen kann man zu jedem UVR U einen Komplementärraum konkret angeben. Hierfür gibt es i.a. viele Möglichkeiten, keine bietet sich in natürlicher Weise an.

- In unendl.-dim. VRen ist es i.a. nicht möglich, Komplementärräume konkret anzugeben.
- Wir beschreiben nun eine natürliche Konstruktion, die von U ausgehend zu einem neuen VR $\tilde{W}$ führt, der dann in allen praktischen Problemen die Rolle eines Komplementärraumes von U spielt. Diese Konstruktion ist unabh. von $\dim V$.

Quotientenvektorräume

12.13 Sei V ein $\mathbb{K}$-VR und U ein UVR. Wir erklären eine Relation $\sim$ auf V durch $x \sim y :\Leftrightarrow x-y \in U$ für alle Paare $(x,y) \in V \times V$.
Diese Relation ist eine Äquivalenzrelation. [reflexiv ✓, symm. ✓, trans. ✓]
Jede Äquivalenzklasse $[x]_U$ ist die Summe $x+U := \{x+u;\ u \in U\}$ $(\neq L(x)+u)$
da ja $y \sim x \Leftrightarrow y-x \in U$, also $y-x=u \Leftrightarrow y=x+u$ für ein $u \in U$ gilt,
also $[x]_U = \{y \in V;\ y \sim x\} = \{x+u;\ u \in U\} = x+U$.
Jede Klasse ist also ein affiner Unterraum, vgl. Def. 9.11.
Für die Menge der Äquivalenzklassen schreibe $\underline{\underline{V/U}} := \{x+U \mid x \in V\}$.

12.14. **Satz:** V/U ist ein VR bzgl. den Verknüpfungen $+, \cdot$, die def. werden durch

$$(x+U)+(y+U) := (x+y)+U$$

$$\alpha \cdot (x+U) := (\alpha x)+U \quad \text{für } x,y \in V, \alpha \in \mathbb{K}.$$

12.15. **Def.:** Der Vektorraum V/U heißt Quotientenraum / Quotientenvektorraum, sprich "V durch U", "V modulo U", "V mod U", ...

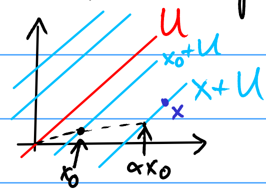
12.16. **Bew.:** • "+", "·" wohldefiniert, d.h. repräsentantenunabh., da U ein UVR von V ist:
- $x_1+U = x_1'+U$, $x_2+U = x_2'+U$ zeigt $x_1 = x_1'+u_1$, $x_2 = x_2'+u_2$ mit $u_1, u_2 \in U$. Dann ist $(x_1+x_2)+U = x_1'+u_1+x_2'+u_2+U = (x_1'+x_2')+U$, $(\alpha x_1)+U = \alpha x_1' + \alpha u_1 + U = (\alpha x_1')+U$.
- Die VR-Axiome 9.3 sind alle von Hand leicht nachprüfbar.

Das neutrale El. in $(V/U,+)$ ist die Klasse $0+U=U$, das Inverse der Klasse $x+U$ ist $-x+U$. □

12.17. **Bem.:** • Für $U=\{0\}$ gilt $x+U=\{x\}$, so dass in diesem Fall $V/\{0\}$ mit V identifiziert werden kann. • Für $U=V$ erhalten wir $V/V = \{0+V\}$.
- $\tilde{W} = V/U$ ist der in Bem. 12.12 gemeinte VR, sehen in Satz 12.19, warum.

12.18. **Bsp.:** $V = \mathbb{R}^2$, sei $U = L(\binom{1}{1}) = \{\binom{x}{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$ die Gerade durch 0 und $\binom{1}{1}$.
Dann ist $V/U = \{x + U \mid x \in V\}$ die Geradenschar der zu U parallelen Geraden.
Diese bildet wieder einen $\mathbb{R}$-VR gemäß

$$(x_1 + U) + (x_2 + U) = (x_1 + x_2) + U,$$
$$\alpha \cdot (x + U) = (\alpha x) + U.$$



$(x_0 + U)$: Familie der Länge 1

Es ist hier $\dim V/U = 1$, denn jedes $(x_0 + U)$ mit $x_0 \notin U$ bildet Basis:
‖ Für $x + U \in V/U$ mit $x \notin U$ ist $x = \alpha x_0 + u$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in U$,
also $x + U = \alpha x_0 + U = \alpha \cdot (x_0 + U)$, d.h. $(x_0 + U)$ erzeugt V/U. ‖

12.19. **Satz:** Sei U ein UVR von V und B eine Basis von U.
Ist $B \cup B'$ eine Basis von V und $B \cap B' = \emptyset$, so ist $(x + U)_{x \in B'}$ eine Basis von V/U (der Länge $\# B'$).

12.20. **Kor.:** Sei U ein UVR von V. Dann gilt $\dim V = \dim U + \dim V/U$.
Bew.: Haben $V = U \oplus L(B')$ in Satz 12.19, und $\dim V/U = \# B' = \dim(L(B'))$.
Dann Dimensionsformel 12.3. □

12.21. **Bew. von Satz 12.19:** Sei $\tilde{B} := (x + U)_{x \in B'}$. Zeigen $\# \tilde{B} = \# B'$, und dass $\tilde{B}$ eine Basis von V/U ist:

- $\tilde{B}$ ist Erz.system, d.h. $L(\tilde{B}) = V/U$: Sei $z + U \in V/U$ bel. Der Vektor $z \in V$ hat die Darstellung $z = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k + \beta_1 y_1 + \ldots + \beta_m y_m$ mit $x_i \in B \subseteq U$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$ für $i \in \{1, \ldots, k\}$ und $y_j \in B'$, $\beta_j \in \mathbb{K}$ für $j \in \{1, \ldots, m\}$. Daraus folgt
$$z + U = \beta_1 (y_1 + U) + \ldots + \beta_m (y_m + U) \text{ mit } y_j + U \in \tilde{B} \text{ für } j \in \{1, \ldots, m\}.$$
- $\tilde{B}$ ist lin. unabh. und es gilt $\# \tilde{B} = \# B'$: Es genügt zu zeigen, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle lin. unabh. Vektoren $x_1, \ldots, x_k \in B'$ die Vektoren $x_1 + U, \ldots, x_k + U \in V/U$ ebenfalls lin. unabh. sind. Dies gelingt so:
⌈ Aus $\alpha_1 (x_1 + U) + \ldots + \alpha_k (x_k + U) = 0 + U$ folgt $(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k) + U = 0 + U$, also $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k \in U$. Wegen $U \cap L(B') = \{0\}$ folgt $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k = 0$, und daraus ergibt sich $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$. ⌋ □

Den affinen Unterräumen von U, die also die Elemente des Quotientenraums bilden, ordnet man auch eine Dimension zu, nämlich die von U.

12.22. **Def:** Sei V ein VR, U ein UUR und $a \in V$.

- Ist $a+U$ ein affiner UR, setzt man $\dim(a+U) := \dim U$.
- Affine URe von V der Dimension 1 heißen Geraden in V,
  " " " 2 " Ebenen in V,
  " " " $n-1$ " Hyperebenen in V, falls $n = \dim V$.
- Ist $a+U$ ein affiner UR, so heißt U sein Richtungsraum.
  Ist darin $U = L(x_1, \dots, x_m)$ mit einer Basis $(x_1, \dots, x_m)$ von U, so heißen $x_1, \dots, x_m$ Richtungsvektoren von $a+U$.
- Parameterdarstellung einer Geraden: $a + L(x)$ mit $a, x \in V$, $x \neq 0$
  Parameterdarstellung einer Ebenen: $a + L(x_1, x_2)$ mit $a, x_1, x_2 \in V$, wo x_1, x_2 linear unabh.
  Parameterdarstellung einer Hyperebenen: $a + L(x_1, \dots, x_{n-1})$ mit $a, x_1, \dots, x_n \in V$, wo $x_1, \dots, x_{n-1}$ lin. unabh. $(n = \dim V)$
  Der Vektor a in der Parameterdarstellung heißt Aufpunktvektor (und ist nicht eind. bestimmt).
- Die affinen URe $a + U_1$ und $b + U_2$ heißen parallel, falls für die zugehörigen Richtungsräume gilt: $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$.
  Ü Ist Parallelität eine Äquivalenzrelation (ev. abh. von $\dim U_i$)?