

Vorlesung Lineare Algebra I

SoSe'24 hhu

K. Halupczok

§4: Lineare Abbildungen und Matrizen

L13: Definition und Eigenschaften linearer Abbildungen

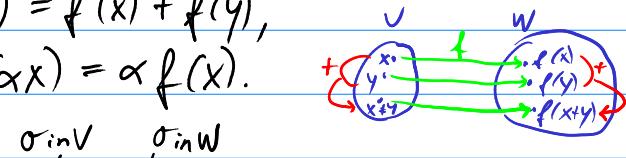
Stichworte: Lineare Abbildung, Isomorphie, Basen und lin. Abb., Kern, Bild, inj. (\Leftrightarrow kerf = {0}), Rangsatz, Homomorphismus, jeder m -dim. K -VR ist isomorph zu K^m

Wir studieren ab jetzt Abbildungen zwischen Vektorräumen. Wir nennen sie "linear", wenn sie die Struktur der VRen (d.h. $+,\cdot$) respektieren:

13.1. Def.: Lineare Abbildungen: Seien V und W VRe über einem Körper K .

Eine A66. $f: V \rightarrow W$ heißt linear (bzw. (VR-) Homomorphismus), falls gilt:

- (L1) $\forall x, y \in V: f(x+y) = f(x) + f(y)$,
- (L2) $\forall x \in V \forall \alpha \in K: f(\alpha x) = \alpha f(x)$.



13.2. Bem.: Für eine Lineare Abb. gilt stets $f(\overset{\wedge}{\alpha}) = \overset{\wedge}{\alpha}$ (da $f(\overset{\wedge}{\alpha}) + f(\hat{x}) = f(\overset{\wedge}{\alpha} + \hat{x}) = f(\overset{\wedge}{\alpha})$).

- Für eine lin. Abb. gilt stets $\forall x, y \in V \forall \alpha, \beta \in K: f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$.
 - Für eine lin. Abb. gilt stets $\forall x_1, \dots, x_m \in V \forall \alpha_1, \dots, \alpha_m \in K: f\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^m \alpha_i f(x_i)$.
 - Soll der gemeinsame Körper K von V, W genannt werden, sagt man " K -linear".
 - Einschränkungen linearer Abb.en auf UV Re sind wieder lineare Abb.en.

Genan heißt das: $f: V \rightarrow W$ linear, $U \subseteq V$ ein UVR $\Rightarrow f|_U : U \rightarrow W$ linear. $\Gamma(1), (2)$ klar,

- Bsp.: Polynomfunktionen $K \rightarrow K$, $x \mapsto P(x)$ mit linearem Polynom $P_0 x + P_1$, $P_0 \neq 0$, sind lin. Abb.en.

Wichtig ist die Frage, ob lineare Abb. en injektiv/surjektiv/bijektiv sind.

Deswegen haben solche Abb.en besondere Namen:

13.3. Def: Ein injektiver Homomorphismus heißt Monomorphismus,

" " Subjektiver " " " " Epimorphismus,

"bijektiver"

"Isomorphismus."

(Im letzten Fall heißen V und W isomorph, d.h. falls $\exists f: V \rightarrow W, f$ Isom.)

In Zeichen: $V \cong W$, sprich "V isomorph zu W". (Ü): $f: W \rightarrow V$ auch Isom.

* Homomorphismus $f: V \rightarrow V$ heißt Endomorphismus (von V),

" bijektiver Endomorphismus heißt Automorphismus (von V).

13.4. Bsp.: $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = (x-y, x+y)$ ist linear [nachrechnen],

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x-y, 1+x)$ ist nicht linear [$f(0) \neq 0$]

$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \bar{z}$ ist \mathbb{R} -linear, aber nicht \mathbb{C} -linear

[denn $f(i \cdot 1) = \bar{i \cdot 1} = \bar{i} = -i$, aber $i \cdot f(1) = i \cdot \bar{1} = i \neq f(i \cdot 1)$.]

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, $f(x,y) = x+iy$ ist ein Isom. von \mathbb{R} -VRen. Also: $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$.

Wollen aber unserer Spaltenkonvention folgen, also z.B. lieber $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix}$ schreiben!

13.5. Bem.: Lineare Abbildungen $f: V \rightarrow W$ sind durch die Angabe der Bilder $f(v_i)$

auf einer Basis $(v_i)_{i \in I}$ von V eindeutig definiert!

Denn ist $v \in V$ beliebig, etwa $v = \sum_{i \in I} \lambda_i v_i$ (höchstens endl. viele $\lambda_i \neq 0$), muss gelten:

$$f(v) = f\left(\sum \lambda_i v_i\right) = \sum \lambda_i f(v_i).$$

Eine andere Wahl gibt es nicht, da die λ_i mit v eindeutig bestimmt sind nach Satz 11.19 (4). Die Vorgabe der Werte $f(v_i)$ auf den Basiselementen v_i liefert somit eine (eindeutig bestimmte) lineare Abbildung.

13.6. Bsp.: $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}^3$: haben die Basis $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ von \mathbb{R}^3 . Setze $f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, und $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Diese Daten genügen, um eine lineare Abb. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ zu erklären. Denn jedes $v \in \mathbb{R}^2$ ist von der Form $v = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, z.B. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. haben dann $f(v) = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, z.B. $f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right) = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Weiter sind Urbild von $\{0\} \subseteq W$ und das Bild von 0 vom Interesse:

13.7. Def.: Kern und Bild einer linearen Abb. $f: V \rightarrow W$

sind $\ker f := \{x \in V \mid f(x) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$ "Kern von f "

und $\text{im } f := f(V) = \{y \in W \mid \exists x \in V : f(x) = y\}$ "Bild von f ".

13.8. Satz: Sei $f: V \rightarrow W$ eine lineare Abb. Dann gilt:

Ker f ist UVR von V , und $\text{im } f$ ein UVR von W .

Bew.: Dies folgt aus der Linearität von f und der Abgeschlossenheit bzgl. +, \cdot (und $0 \in \ker f$), im Einzelnen:

$$\bullet x, y \in \ker f \Rightarrow f(x+y) = f(x) + f(y) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow x+y \in \ker f,$$

$$f(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot f(x) = \alpha \cdot 0 = 0 \Rightarrow \alpha \cdot x \in \ker f, \quad 0 \in \ker f \quad \bullet m, w \in \text{im } f \Rightarrow m = f(x), w = f(y)$$

$$\Rightarrow m+w = f(x)+f(y) = f(x+y) \in \text{im } f, \quad \alpha \cdot m = \alpha \cdot f(x) = f(\alpha x) \in \text{im } f, \quad 0 = f(0) \in \text{im } f. \quad \square$$

Ob eine lin. Abb. injektiv ist, kann man leicht anhand ihres Kerns sehen:

- 13.9. Satz: Sei $f: V \rightarrow W$ lin. Abb. Dann gilt: f injektiv ($\Rightarrow \ker f = \{\emptyset\}$)
Bew.: " \Rightarrow " Ist f injektiv, hat $\emptyset \in W$ nur das Urbild O , d.h. $\ker f = \{\emptyset\}$.
" \Leftarrow " Ist $\ker f = \{\emptyset\}$ und $f(x) = f(y)$, so folgt $f(x-y) = O$,
also $x-y \in \ker f = \{\emptyset\}$, also $x-y = O$, also $x=y$. \square

Für die Dimensionen der VRe $\ker f$ und $\text{im } f$ gibt eine Formel:

- 13.10. Rangsatz: Sei V endlich-dim. K-VR, W ein K-VR und $f: V \rightarrow W$ linear.

Dann gilt:

$$\dim \ker f + \dim \text{im } f = \dim V.$$

- 13.11. Def.: $\dim \text{im } f \in \mathbb{N}_0$ heißt der Rang von f . Notation: $\text{rg}(f) := \dim \text{im } f$.

Bem.: Die Dimension des Bildes (d.h. der Rang von f) ist also nie größer als die Dimension des "Urbildraumes" V ! Man nennt den Rangsatz gelegentlich auch den "Dimensionssatz für lineare Abbildungen".

- 13.12. Beweis von 13.10: Nimm Basis v_1, \dots, v_r von $\ker f$ (11.5.1)), ergänze diese nach Basisergänzungssatz 11.5.3) zu Basis $v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_m$ von V

Dann ist durch $f|_{L(v_{r+1}, \dots, v_m)}: L(v_{r+1}, \dots, v_m) \rightarrow \text{im } f$ ein Isomorphismus gegeben: \circ Lin. Abb. Klar nach 13.2.

- ist injektiv: $f(v) = O$ mit $v \in L(v_{r+1}, \dots, v_m) \Rightarrow v \in \ker f \cap L(v_{r+1}, \dots, v_m)$
 $\Rightarrow v \in L(v_1, \dots, v_r) \cap L(v_{r+1}, \dots, v_m) = \{\emptyset\}$, also $v = \emptyset$.

- ist surjektiv: Ist $w \in \text{im } f$ mit $f(v) = w$ für $v \in V$, so ist

$v \in L(v_1, \dots, v_m)$, also $v = \sum_{i=1}^r \lambda_i v_i + \sum_{j=r+1}^m \mu_j v_j$.

Setze $v' := \sum_{j=r+1}^m \mu_j v_j$, $v' \in L(v_{r+1}, \dots, v_m)$,

dann ist $f(v') = f(v - \sum_{i=1}^r \lambda_i v_i) = f(v) - \sum_{i=1}^r \lambda_i f(v_i) = f(v) = w$.

Somit ist $\dim \text{im } f = m - r = \dim V - \dim \ker f$. \square

Bem.: Klappt auch für $r=0$: Dann starten wir mit der Basis \emptyset von $\ker f = \{\emptyset\}$, Rest des Beweises genauso. Wir geben in 13.15 noch einen anderen Beweis des Rangsatzes.

- 13.13. Bsp.: In Bsp. 13.6 war $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}^3$. Der Rang von f kann laut Rangsatz maximal 2 sein; dieser ist zwei, da $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ lin. unabh. Also ist $\dim \ker f = 0$, d.h. f ist injektiv.

Wir formulieren jetzt den in Satz 12.19 genannten Zusammenhang zwischen Komplementärraum und QuotientenVR in einer einfachen Version, ohne darin Basen zu verwenden:

13.14. Satz: Sind U, W KVR von V mit $V = U \oplus W$. Dann: $W \cong V/U$ und $U \cong V/W$.

Bew.: Mit Basis B von U und Basis B' von W greift 12.19, d.h. $(x+u)_{x \in B}$ ist Basis von V/U . Wir haben dann den Isomorphismus $f: W \rightarrow V/U$, $f(x) := x+u$ für alle $x \in B'$. Somit ist $W \cong V/U$, und analog ist $U \cong V/W$. \square

13.15. Korollar: Rangsatz 13.10.

Bew.: Sei $U := \ker f$, W ein Komplementärraum von U (ex. laut Satz 12.11).

Mit $W \cong V/U \cong \text{im } f$ laut Homomorphiesatz 13.16 folgt $\dim V = \dim U + \dim W$
 $\stackrel{13.14}{\uparrow} \quad \stackrel{13.16}{\uparrow}$
 $= \dim \ker f + \text{rg}(f)$. \square

Der hier benutzte sogenannte Homomorphiesatz besagt, dass der Quotienten VR $V/\ker f$ isomorph zu $\text{im } f$ ist. Das ist zwar abstrakt, aber offensichtlich.

13.16. Homomorphiesatz: Seien V, W zwei K-VR, $f: V \rightarrow W$ linear.

Dann gilt $V/\ker f \cong \text{im } f$.

(Der induz. Isom. \bar{f} ist ein. best.)

Bew.: Haben:

$$V \xrightarrow{f} \text{im } f \subseteq W$$

$\xrightarrow{k} \text{im } f \xrightarrow{\bar{f}}$ mit kanonischer Abb. $k: V \rightarrow V/\ker f$
 $v \mapsto v + \ker f$

$V/\ker f$ und lin. Abb. $\bar{f}: V/\ker f \rightarrow \text{im } f$
 $v + \ker f \mapsto f(v)$. \bar{f} linear; \bar{f}

- \bar{f} ist wohldefiniert, d.h. repräsentantenunabhängig erklärt.

Ist $v + \ker f = v' + \ker f$, ist $v = v' + u$ mit $u \in \ker f$. Dann ist $f(v) = f(v' + u) = f(v') + f(u) = f(v') + 0 = f(v')$, also $\bar{f}(v + \ker f) = f(v) = f(v') = \bar{f}(v' + \ker f)$.

- Dann: $f = \bar{f} \circ k$, d.h. das obige "Diagramm kommutiert" $\bar{f} \circ k(v) = \bar{f}(v + \ker f) = f(v)$

- \bar{f} ist injektiv: Sei $v + \ker f \in \ker \bar{f}$, d.h. $\bar{f}(v + \ker f) = 0$, dann ist auch $f(v) = \bar{f}(v + \ker f) = 0$, also $v \in \ker f$ und $v + \ker f = 0 + \ker f$.

Also ist $\ker \bar{f} = \{0 + \ker f\}$, d.h. \bar{f} ist injektiv nach Satz 13.9.

- \bar{f} ist surjektiv: Ist $w \in \text{im } \bar{f}$, etwa $w = \bar{f}(v)$, so ist $\bar{f}(v + \ker f) = f(v) = w$, es folgt $w \in \text{im } f$. Also ist \bar{f} surjektiv. \square

Anwendungen des Rangsatzes (13.10)

13.17. Satz: Sei V endl.-dim. K -VR, $f: V \rightarrow W$ linear. Dann: f injektiv (\Leftrightarrow) f surjektiv.

Bew.: $\dim V = \dim \text{im } f + \dim \ker f$ zeigt:

$$f \text{ injektiv} \Leftrightarrow \ker f = \{0\} \quad \begin{matrix} \Leftrightarrow \\ 13.9 \end{matrix} \quad \dim V = \dim \text{im } f \Leftrightarrow \text{im } f = V \quad \begin{matrix} \Leftrightarrow \\ 13.10 \end{matrix} \quad f \text{ surjektiv.}$$

$\text{im } f \subseteq V, 12.2$

13.18. Bem.: • Gilt nicht wenn $f: V \rightarrow W$ linear: $V = \mathbb{R}$, $W = \mathbb{R}[T]$, $f(v) = 2v$ inj., nicht surj.

• Gilt nicht wenn $f: V \rightarrow V$ linear, $\dim V = \infty$: $V = K[T]$, $f(\sum a_i T^i) = \sum a_i T^{2i}$ inj., nicht surj.

Wir erhalten aus dem Rangsatz, dass jeder n -dim. K -VR zu K^n isomorph ist, d.h. außer dem K^n gibt es im wesentlichen keinen anderen n -dim. K -VR:

13.19. Satz: Jeder K -VR V mit $\dim V = n$ ist isomorph zu K^n .

Bew.: K^n hat kanonische Basis (e_1, \dots, e_n) , vgl. 11.4.

Jede Basis (v_1, \dots, v_n) von V liefert einen Isomorphismus $f: V \rightarrow K^n$, $f(v_i) = e_i$.

Surjektiv: klar, injektiv wegen Rangsatz: $\dim \ker f = \dim V - \dim \text{im } f = 0$. □

Bem.: Die Umkehrabb. f^{-1} bildet (α_i) ab auf $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$.

Der Vergleich der Dimensionen von V und W liefert Aussagen über Injektivität / Surjektivität / Bijektivität der linearen Abb. $f: V \rightarrow W$.

13.20. Satz: Seien V, W endl.-dim. K -VRs, $f: V \rightarrow W$ linear. Dann gilt:

a) Sei $\dim V = \dim W$. Dann gilt: f injektiv $\Leftrightarrow f$ surjektiv $\Leftrightarrow f$ bijektiv.
(In diesem Fall ist f dann ein Isomorphismus.)

b) Sei $\dim V > \dim W$, dann ist f nicht injektiv.

c) Sei $\dim V < \dim W$, dann ist f nicht surjektiv.

Bew.: a): Wie in 13.17 folgt f inj. (\Rightarrow) f surj. In diesem Fall folgt: f bijektiv.

Ist f bijektiv, ist f injektiv und surjektiv.

b) $\dim \text{im } f + \dim \ker f = \dim V > \dim W \geq \dim \text{im } f \Rightarrow \dim \ker f > 0 \Rightarrow \ker f \neq \{0\} \Rightarrow f$ nicht injektiv.

c) $\dim \text{im } f \leq \dim \text{im } f + \dim \ker f = \dim V < \dim W \Rightarrow \text{im } f \subsetneq W \Rightarrow f$ nicht surjektiv. □

13.21. Bem.: Ein Isomorphismus $f: V \rightarrow W$ erhält alle "strukturellen Eigenschaften": $S \subseteq V$ ist

lin. unabh. / ER-system / Basis in V genau wenn $f(S) \subseteq W$ lin. unabh. / ER-system / Basis in W .