

# Vorlesung Lineare Algebra I

SoSe'24 hhu

K. Halupczok

## §4: Lineare Abbildungen und Matrizen

### L15: Matrixdarstellungen und $\text{Hom}(V,W)$

Stichworte: Sylvester-Rangsatz,  $\text{Hom}(V,W) \cong K^{m \times n}$ ,  $g \circ f(x)$  entspricht  $(B \cdot A) \cdot x$ .

Assoziativität des Matrixprodukts,  $f^\top$  entspricht  $A^\top$ , Dualraum  $V^*$ , transponierte Abb.  $f^\top$

Wir behandeln jetzt VRe linearer Abbildungen und studieren Eigenschaften linearer Abbildungen mit ihren Matrixdarstellungen

Schauen wir auf den K-VR  $W^A := \{f: A \rightarrow W; f \text{ Abb.}\}$ , wo  $A \neq \emptyset$  bel. Menge und  $W$  ein K-VR. Interessant sind die Fälle, wo  $A$  ebenfalls ein K-VR ist und  $f: A \rightarrow W$  linear:

15.1. Satz: Seien  $U, V, W$  K-VRe. Dann gilt:

(i) Sind  $f: V \rightarrow W, g: W \rightarrow U$  linear, so auch  $g \circ f: V \rightarrow U$ .

(ii) Ist  $f: V \rightarrow W$  ein Isomorphismus, so auch  $f^{-1}: W \rightarrow V$ .

(iii) Sind  $f, g: V \rightarrow W$  linear, so auch  $f \circ g$  und auch  $\alpha f$  für alle  $\alpha \in K$ .

Bew.: (i), (iii): V, (ii): z.B. ist nur noch die Linearität von  $f^{-1}$ . Dazu seien

$x, y \in W$  und  $\alpha, \beta \in K$ . Aus  $f(f^{-1}(\alpha x + \beta y)) = \alpha x + \beta y = \alpha f(f^{-1}(x)) + \beta f(f^{-1}(y)) = f(\alpha f^{-1}(x) + \beta f^{-1}(y))$  folgt wegen der Injektivität von  $f$ , dass  $f^{-1}(\alpha x + \beta y) = \alpha f^{-1}(x) + \beta f^{-1}(y)$ .  $\square$

Die folgenden Rechenregeln für den Rang zusammengesetzter linearer Abbildungen

sind bekannt als Sylvester-Rangsatz:

15.2. Satz: Seien  $V, W, U$  endlich-dim. K-VRe und  $f: V \rightarrow W, g: W \rightarrow U$  lin. Abb. en,

so gilt (i)  $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(g|_{f(V)}) = \text{rg}(f) - \dim(\text{im}(f) \cap \ker(g))$

und (ii)  $\text{rg}(f) + \text{rg}(g) - \dim W \leq \text{rg}(g \circ f) \leq \min(\text{rg}(f), \text{rg}(g))$ .

Bew.: (i): Betrachte  $\tilde{g} = g|_{\text{im}(f)}$ . Dann ist  $\text{im}(\tilde{g}) = \text{im}(g \circ f)$ , also auch

$\text{rg}(\tilde{g}) = \text{rg}(g \circ f)$ , und es gilt  $\ker(\tilde{g}) = \text{im}(f) \cap \ker(g)$ .

Mit dem Rangsatz 13.10 folgt  $\text{rg}(\tilde{g}) = \dim \text{im}(\tilde{g}) - \dim \ker(\tilde{g}) = \text{rg}(f) - \dim \ker(g)$ .

(ii): Zweites  $\leq$ : Nach (i) ist  $\text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg}(f)$ , und weiter gilt  $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(g|_{\text{im}(f)})$

$= \dim g(f(V)) \leq \dim g(W) = \text{rg}(g)$ . Erstes  $\leq$ : Andererseits gilt nach (i), dass

$\text{rg}(f) - \text{rg}(g \circ f) = \dim(\text{im}(f) \cap \ker(g)) \leq \dim \ker(g) = \dim W - \text{rg}(g)$  laut Rangsatz 13.10.  $\square$

15.3. Bem.: • Nach 15.1 ist die Isomorphie von K-VRen transitiv und symmetrisch (und reflexiv sowieso).

15.4. Daf.: Wir setzen  $\text{Hom}(V, W) := \{f: V \rightarrow W; f \text{ linear}\}$ .

• Nach 15.1(iii) ist diese Menge ein UVR des K-VRs  $W^V$ .

Wir bezeichnen  $\text{Hom}(V, W)$  als VR aller Homomorphismen von  $V$  nach  $W$ .

• Nach 15.1.(i), (ii) ist  $\text{Hom}(V, V)$  auch ein Ring mit Eins (mit "+", "o", "1" = id).

Außerdem gilt darin:  $\alpha(f \circ g) = (\alpha f) \circ g = f \circ (\alpha g)$  für alle  $\alpha \in K$ .

Eine solche Struktur heißt eine K-Algebra (vgl. dies mit 14.10/14.11).

• Im Fall  $V=W$  heißt  $\text{End}(V) := \text{Hom}(V, V)$  die Endomorphismenalgebra auf  $V$ . Die Teilmenge  $\text{Aut}(V) := \{f: V \rightarrow V \text{ Isom.}\}$  von  $\text{End}(V)$  ist bezüglich der Komposition "o" eine Gruppe, vgl. dazu 15.9 unten.

Wir können den K-VR  $\text{Hom}(V, W)$  mit dem K-VR der Matrizen  $K^{m \times n}$  (isomorph) identifizieren, wo  $m = \dim W$ ,  $n = \dim V$  ist, wie folgt.

15.5. Satz: Es seien  $V, W$  K-VRs,  $m = \dim W$ ,  $n = \dim V$ . Dann ist

$\text{Hom}(V, W) \cong K^{m \times n}$  mit einem Isomorphismus

$$f \mapsto {}_e[f]_{\mathcal{B}} = M_e^{\mathcal{B}}(f), \quad \text{wenn } \mathcal{B}, \mathcal{Q} \text{ Basen von } V, W \text{ sind.}$$

Bew.: Sei  $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_m)$ ,  $\mathcal{Q} = (y_1, \dots, y_n)$ .

Ist  ${}_e[f]_{\mathcal{B}} = (\alpha_{ij})$ ,  ${}_e[g]_{\mathcal{B}} = (\beta_{ij})$ , so gilt für alle  $\alpha, \beta \in K$  und  $j = 1, \dots, m$ :

$$(\alpha f + \beta g)(x_j) = \alpha f(x_j) + \beta g(x_j) = \alpha \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} y_i + \beta \sum_{i=1}^m \beta_{ij} y_i = \sum_{i=1}^m (\alpha \alpha_{ij} + \beta \beta_{ij}) y_i.$$

Also folgt  ${}_e[\alpha f + \beta g]_{\mathcal{B}} = \alpha {}_e[f]_{\mathcal{B}} + \beta {}_e[g]_{\mathcal{B}}$  (nach 14.21),

somit ist die im Satz genannte Abb. linear.

• Weiter wird für jede Matrix  $A = (\alpha_{ij}) \in K^{m \times n}$  durch die Setzung

$$f(x_j) := \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} y_i, \quad j = 1, \dots, m,$$

eine lineare Abb. f eindeutig festgelegt (Bem. 13.5), die  ${}_e[f]_{\mathcal{B}} = A$  erfüllt.

Also ist die Abb.  $f \mapsto {}_e[f]_{\mathcal{B}}$  bijektiv.

Dann ist klar, dass im Satz ein Isomorphismus angegeben ist.  $\square$

Für die Dimension von  $\text{Hom}(V, W)$  folgt:

15.6. Satz: Seien  $V, W$  endlich-dimensionale  $K$ -VRe. Dann ist auch der VR  $\text{Hom}(V, W)$  endlich-dimensional, und es gilt  $\dim \text{Hom}(V, W) = \dim V \cdot \dim W$ .

Bew.: Wegen 15.5. ist  $\dim \text{Hom}(V, W) = \dim K^{m \times m} = m \cdot m = \dim V \cdot \dim W$ .  $\square$

Wir zeigen nun in 15.7.:

Die Hintereinanderausführung  $g \circ f$  zweier linearer Abb.  $f: V \rightarrow W$ ,  $g: W \rightarrow U$ , entspricht in der Matrixdarstellung einfach dem Matrixprodukt der Matrizen zu  $f$  und  $g$ . Das geht nur, weil wir das Produkt zweier Matrizen so definiert haben wie in 14.5 und beantwortet die Frage in 14.6.

Anstelle von "o" linearer Abb.en kann also einfacher das Matrixprodukt der zugehörigen Matrizen betrachtet werden. Dies stellt eine wichtige Technik zur Untersuchung der Verknüpfung linearer Abb.en dar.

15.7. Satz: Seien  $V, W, U$   $K$ -VRe mit  $\dim V = n$ ,  $\dim W = m$ ,  $\dim U = l$  und Basen  $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ . Weiter seien  $f: V \rightarrow W$ ,  $g: W \rightarrow U$  linear. Dann gilt:

$$\mathbb{D}[g \circ f]_{\mathcal{B}} = \mathbb{D}[g]_{\mathcal{C}} \cdot \mathbb{C}[f]_{\mathcal{B}},$$

Matrixprodukt-Möl

in anderer Notation:  $M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}}(g \circ f) = M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}(g) \cdot M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)$ .

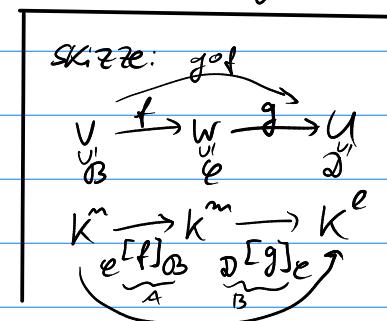
Bew.: Seien  $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\mathcal{C} = (y_1, \dots, y_m)$ ,  $\mathcal{D} = (z_1, \dots, z_l)$

und  $\mathbb{C}[f]_{\mathcal{B}} = (\alpha_{ij})$ ,  $\mathbb{D}[g]_{\mathcal{C}} = (\beta_{ij})$ ,  $\mathbb{D}[g \circ f]_{\mathcal{B}} = (\gamma_{ij})$ .

Dann gilt

$$\begin{aligned} g \circ f(x_j) &= g(f(x_j)) = g\left(\sum_{i=1}^m \alpha_{ij} y_i\right) = \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} g(y_i) \\ &= \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} \left( \sum_{n=1}^l \beta_{ni} z_n \right) = \sum_{n=1}^l \underbrace{\left( \sum_{i=1}^m \beta_{ni} \alpha_{ij} \right)}_{= \gamma_{nj}} z_n, \end{aligned}$$

wobei die Matrix  $(\gamma_{nj})$  genau durch die Matrix-Multiplikation von  $(\beta_{ij})$  mit  $(\alpha_{ij})$  entsteht, vgl. Def. 14.5.  $\square$



Damit können wir etwa (nachträglich) die Assoziativität des Matrixprodukts verifizieren, vgl. 14.10(5), indem wir diese auf die Assoziativität von " $\circ$ " zurückführen, die klar ist.

15.8. Satz: Seien  $A \in K^{m \times m}$ ,  $B \in K^{m \times n}$ ,  $C \in K^{n \times s}$ . Dann ist  $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$  richtig.

Bew.: Betr. die linearen Abbildungen  $h: K^m \rightarrow K^m$ ,  $h(x) := Ax$ ,  $g: K^m \rightarrow K^n$ ,  $g(x) := Bx$ ,  $f: K^n \rightarrow K^s$ ,  $f(x) := Cx$ .

$$\text{Skizze: } K^m \xrightarrow[A]{h} K^m \xrightarrow[B]{g} K^n \xrightarrow[C]{f} K^s$$

Es gilt  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ , also folgt mit Satz 15.7:

$$\begin{aligned} A \cdot (B \cdot C) &= [h] \cdot ([g] \cdot [f]) = [h] \cdot [g \circ f] = [h \circ (g \circ f)] \\ &= [(h \circ g) \circ f] = [h \circ g] \cdot [f] = ([h] \cdot [g]) \cdot [f] \\ &= (A \cdot B) \cdot C. \end{aligned}$$

□

Die Inverse  $f^{-1}$  eines Isom.  $f$  wird mit der zu  $A$  inversen Matrix  $A^{-1}$  dargestellt, wenn  $A$  die Matrixdarstellung von  $f$  ist, wie folgt.

15.9. Def.:  $B$  heißt eine Inversen Matrix von  $A \in K^{m \times m}$ , falls  $B \cdot A = A \cdot B = I_m$ , vgl. 7.11.

Notation:  $A^{-1} := B$  ( beachten, dass  $B$  eindeutig best. ist in  $(K^{m \times m})^*$ , vgl. 7.19, 7.10).

Satz: Seien  $V, W$   $K$ -VRe,  $f: V \rightarrow W$  ein Isom.,  $\Omega_V, \Omega_W$  Basen von  $V, W$ .

Für die inverse Abb.  $f^{-1}$  von  $f$  gilt  ${}_{\Omega_W}[f^{-1}]_e = {}_{\Omega_V}[f]_e^{-1}$ ,

in anderer Notation:  $M_{\Omega_W}^{\Omega_V}(f^{-1}) = (M_{\Omega_V}^{\Omega_V}(f))^{-1}$ .

Bew.: Ist  $f$  lin. Isom., folgt nach 6.18, dass  $f^{-1} \circ f = id_V$  und  $f \circ f^{-1} = id_W$ ,

$$\text{also } {}_{\Omega_V}[f^{-1}]_e \cdot {}_{\Omega_V}[f]_e = {}_{\Omega_V}[id_V]_e = I_m \text{ und } {}_{\Omega_V}[f]_e \cdot {}_{\Omega_W}[f^{-1}]_e = {}_{\Omega_W}[id_W]_e = I_m,$$

wo  $m = \dim V = \dim W$ . Somit gilt  ${}_{\Omega_W}[f^{-1}]_e = {}_{\Omega_V}[f]_e^{-1}$  nach 7.10. (ii).

Ist  ${}_{\Omega_V}[f]_e$  invertierbar, best. die Abb.  $g: W \rightarrow V$ , die zu  ${}_{\Omega_V}[f]_e^{-1}$  gehört, d.h.  $g(x) := {}_{\Omega_V}[f]_e^{-1} \cdot x$  für alle  $x \in W$  (ist linear!).

Dann folgt wieder  $I_m = {}_{\Omega_V}[f]_e \cdot {}_{\Omega_V}[f]_e^{-1} = {}_{\Omega_V}[f \circ g]_e$

$$\text{und } I_m = {}_{\Omega_W}[f^{-1}]_e \cdot {}_{\Omega_W}[f]_e = {}_{\Omega_W}[g \circ f]_e,$$

somit ist  $f \circ g = id_V$  und  $g \circ f = id_W$ , also  $g = f^{-1}$  nach 6.19. □

Bem.: Die Umkehrabb. einer bijektiven lin. Abb. ist insbesondere wieder linear.

## Spezialfall Hom(V, K)

Der Fall  $W=K$  in  $\text{Hom}(V, W)$  ist ein wichtiger Spezialfall.

15.10. Def.: Ist  $V$  ein  $K$ -VR, so schreibe  $V^* := \text{Hom}(V, K)$ .

anstelle  $f \in V^*$  schreiben wir eher  $x^* \in V^*$ .

$V^*$  heißt der Dualraum von  $V$ , und jedes Element  $x^* \in V^*$  darin heißt Linearform oder lineares Funktional auf  $V$ .

15.11. Tbsp.: 1.) Sei  $A \neq \emptyset$  eine Menge,  $x_0 \in A$ ,  $V = K^A$ .

Die durch  $\ell: K^A \rightarrow K$ ,  $f \mapsto \ell(f) := f(x_0)$  "f bei  $x_0$  auswerten"

erklärte Abb. ist eine Linearform (und heißt Auswertungsfunktional).

2.) Die Abb. Spur:  $K^{n \times n} \rightarrow K$ ,  $(x_{ij}) \mapsto \sum_{i=1}^n x_{ii}$  ist eine Linearform.

15.12. Bem.: 1.) Ist  $\dim V = m$ , folgt  $\dim V^* = m$ , also  $V \cong V^*$ .

2.) Ist  $B = (x_1, \dots, x_m)$  Basis von  $V$ , so wird durch

$$x_j^*(x_k) := \delta_{jk} := \begin{cases} 1, & j=k \\ 0, & j \neq k \end{cases} \quad \text{für } j, k = 1, \dots, m$$

eine Basis  $B^* = (x_1^*, \dots, x_m^*)$  von  $V^*$  festgelegt.

$B^*$  heißt die zur Basis B duale Basis und ist eindeutig bestimmt.

(wegen der gemachten Vorgabe der Werte auf der Basis  $B$ , vgl. Bem. 13.5.)

Der Basisvektor  $x_j^* \in B^*$  heißt j-tes Koordinatenfunktional bezgl. B.

Dann für alle  $x \in V$ ,  $x^* \in V^*$  gilt:  $x = x_1^*(x) \cdot x_1 + \dots + x_m^*(x) \cdot x_m \quad (1)$ ,

und  $x^* = x^*(x_1) \cdot x_1^* + \dots + x^*(x_m) \cdot x_m^* \quad (2)$ .

zu (1):  $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \Rightarrow x^*(x) = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i^*(x_i) = \lambda_j \quad \text{für jedes } j,$

zu (2):  $x^* = \sum_{i=1}^m \mu_i x_i^* \Rightarrow x^*(x_i) = \sum_{i=1}^m \mu_i \underbrace{x_i^*(x_i)}_{=\delta_{ij}} = \mu_j \quad \text{für jedes } j.$

3.) Speziell für  $V = k^n$  und die Standardbasis  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_m)$

erhalten wir  $e_j^*$  durch das  $n$ -Tupel  $(e_j^*(e_1), \dots, e_j^*(e_m)) = e_j$ ,  
 und ein beliebiges  $x^* \in (k^n)^*$  wegen  $x^* = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j^*$ ,  $x^*(e_i) = \alpha_i$ .  
 erhalten wir durch  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ .

Durch die Auffassung von  $n$ -Tupeln als Spaltenvektoren

haben wir  $x = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ . Es wird  $(k^n)^*$  auf natürliche Art mit  $k^n$  identifiziert, und  $\mathcal{B}^*$  mit  $\mathcal{B}$ .

Die "Wirkung" von  $x^*$  auf  $y = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$  wird dann geg. durch

$$x^*(y) = \alpha_1 \beta_1 + \dots + \alpha_n \beta_m.$$

4.) Unendlich dimensionale VRe  $V$  sind i.a. nicht zu  $V^*$  isomorph, können aber stets injektiv nach  $V^{**}$ , dem sogenannten Bidualraum, linear abgebildet werden. (ohne Bew.)

Zuletzt ordnen wir jeder linearen Abb.  $f: V \rightarrow W$  eine lineare Abb.  $f^T: W^* \rightarrow V^*$  zu.

15.13. Def.: Seien  $V, W$  K-VRe und  $f: V \rightarrow W$  linear. Dann heißt die durch

$$f^T: W^* \rightarrow V^*, y^* \mapsto y^* \circ f$$

erklärte lineare Abbildung  $f^T$  die transponierte Abbildung von  $f$ .

(Auch: die duale Abbildung von  $f$ .)

15.14. Satz: Es seien  $V, W, U$  K-VRe. Dann gilt:

$$(i) (\text{id}_V)^T = \text{id}_{V^*},$$

$$(ii) (f+g)^T = f^T + g^T, (\alpha f)^T = \alpha \cdot f^T \text{ für alle } f, g \in \text{Hom}(V, W), \alpha \in K,$$

$$(iii) (g \circ f)^T = f^T \circ g^T \text{ für alle } f \in \text{Hom}(V, W), g \in \text{Hom}(W, U),$$

(iv)  $f \in \text{Hom}(V, W)$  ist genau dann ein Isomorphismus, wenn  $f^T \in \text{Hom}(W^*, V^*)$  ein Isomorphismus ist. In diesem Fall gilt  $(f^{-1})^T = (f^T)^{-1}$ .

Bew.: (i):  $(\text{id}_V)^T(x^*) = x^* \circ \text{id}_V = x^* \text{ für alle } x^* \in V^*$ ,

(ii):  $(f+g)^T(y^*) = y^* \circ (f+g) = y^* \circ f + y^* \circ g = f^T(y^*) + g^T(y^*) = (f^T + g^T)(y^*)$   
 für alle  $y^* \in W^*$ . Analog gilt  $(\alpha f)^T(y^*) = y^* \circ (\alpha f) = \alpha(y^* \circ f) = \alpha(f^T(y^*))$   
 $= (\alpha f^T)(y^*)$  für alle  $y^* \in W^*$ .

(iii): Haben  $g \circ f \in \text{Hom}(V, U)$ ,  $(g \circ f)^T \in \text{Hom}(U^*, V^*)$ . Dann gilt für alle  $z^* \in U^*$ :

$$(g \circ f)^T(z^*) = z^* \circ (g \circ f) \text{ und } (f^T \circ g^T)(z^*) = f^T(g^T(z^*)) = g^T(z^*) \circ f = (z^* \circ g) \circ f = z^* \circ (g \circ f).$$

(iv):  $\Rightarrow$ : Ist  $f \in \text{Hom}(V, W)$  bij., ex.  $\tilde{f}$  mit  $\tilde{f} \circ f = \text{id}_V$ ,  $f \circ \tilde{f} = \text{id}_W$ . Daraus folgt  $f^T \circ (f^{-1})^T = (f^{-1} \circ f)^T = (\text{id}_V)^T = \text{id}_{V^*}$  und  $(f^{-1})^T \circ f^T = (f \circ f^{-1})^T = (\text{id}_W)^T = \text{id}_{W^*}$ . Also ist auch  $f^T$  bij. und  $(f^T)^{-1} = (f^{-1})^T$ .

$\Leftarrow$ : Dies ergibt sich aus folgenden zwei Behauptungen:

1. Beh.: Ist  $f^T \in \text{Hom}(W^*, V^*)$  inj., so ist  $f \in \text{Hom}(V, W)$  inj.

Sei  $f(x) = 0$ . Weil  $f^T$  surj., ex. zu jedem  $x^* \in V^*$  ein  $y^* \in W^*$  mit  $f^T(y^*) = x^*$ . Es folgt  $x^*(x) = f^T(y^*)(x) = y^*(f(x)) = 0$  für alle  $x^* \in V^*$ .

Dann ist  $x=0$ , dann sonst ergänze  $x$  zu Basis  $B$  von  $V$ , definiere dann eine nichttriv. Linearform  $x^* \in V^* \setminus \{0\}$  durch  $x^*(x)=1$ ,  $x^*(x')=0$  für alle  $x' \in B \setminus \{x\}$ .

2. Beh.: Ist  $f^T \in \text{Hom}(W^*, V^*)$  inj., so ist  $f \in \text{Hom}(W, V)$  surj.

Sonst sei  $f$  nicht surj. Dann gilt  $f(V) \neq W$ . Ergänze eine Basis  $\mathcal{C}$  von  $f(V)$

zu einer Basis  $\mathcal{C}'$  von  $W$ , wähle ein festes  $y \in \mathcal{C}' \setminus \mathcal{C}$ , definiere eine Linearform  $y^* \in W^*$  durch  $y^*(y)=1$  und  $y^*(y')=0$  für  $y' \in \mathcal{C}' \setminus \{y\}$ .

Dann gilt  $f^T(y^*)(x) = y^*(f(x)) = 0$  für alle  $x \in V$ , also  $f^T(y^*) = 0^*$ .

Da  $f^T$  inj. ist, folgt, dass  $y^* = 0^*$  im  $\mathbb{Z}$  zur Def. von  $y^*$ .  $\square$

15.15. Def.: Ist  $A \in K^{m \times n}$  mit  $A = (a_{ij})_{i,j}$  geg., so heißt  $A^T := (a_{ji})_{i,j} \in K^{n \times m}$  die zu  $A$  transponierte Matrix.

$$\text{Bsp.: } (4 \begin{smallmatrix} 2 \\ 5 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 3 \\ 6 \end{smallmatrix})^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad (a_1, a_2, \dots, a_m)^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}^T = (a_1, a_2, \dots, a_m).$$

Zur transponierten linearen Abb. gehört genau die transponierte Matrix:

15.16. Satz: Seien  $V, W$   $K$ -VRe,  $\dim V = m$ ,  $\dim W = n$ , mit Basen  $B = (x_1, \dots, x_m)$  von  $V$  und  $C = (y_1, \dots, y_n)$  von  $W$ . Weiter sei  $f: V \rightarrow W$  lineare Abb. Sind  $B^*$  bzw.  $C^*$  die zu  $B$  bzw.  $C$  dualen Basen, so gilt

$$B^* [f^T]_{C^*} = (B[f]_B)^T \quad \text{Bzw.} \quad M_{B^*}^{C^*} (f^T) = (M_B^C (f))^T.$$

Bew.: Ist  $B^* [f^T]_{C^*} = (\delta_{kl})$ , so gilt nach Def. der Abbildungsmatrix

$$f^T(y_e^*) = \sum_{j=1}^m \delta_{je} x_j^*, \quad \text{also} \quad f^T(y_e^*)(x_k) = \sum_{j=1}^m \delta_{je} x_j^*(x_k) = \delta_{ek}. \quad \text{Andererseits ist}$$

nach Def.  $f^T(y_e^*) = y_e^* \circ f$ , also gilt für deren Matrixdarstellung  $(\alpha_{ke})$ , dass  $(f^T(y_e^*)) (x_k) = y_e^*(f(x_k)) = y_e^* \left( \sum_{i=1}^m \alpha_{ik} y_i \right) = \sum_{i=1}^m \alpha_{ik} y_e^*(y_i) = \alpha_{ek}$ , also  $\delta_{ek} = \alpha_{ek}$ .  $\square$