Vorlesung Lineare Algebra I

SoSe'24 hhu
K. Halupczok

§4: Lineare Abbildungen und Matrizen

L16: Matrixform eines LGS

Stichworte: LGS in Matrixform, Zeilenrang = Spaltenrang, Zeilenstufenform, LGS-Lösungskriterien, Gaußeliminationsverfahren, inverse/transponierte Matrix

---

Ein Lineares Gleichungsystem (LGS) wie in 10.6 definiert kann jetzt auch verstanden werden als eine Matrizengleichung der Form $A \cdot x = b$, bei der $A \in K^{m \times n}$, $b \in K^m (= K^{m\times 1})$ gegeben sind und $x \in K^n (= K^{n \times 1})$ gesucht ist.

Ausgeschrieben: $Ax = b \iff$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \cdots & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & & \\ \alpha_{m1} & \cdots & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix} \iff \left| \begin{array}{l} \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \ldots + \alpha_{1n}\xi_n = \beta_1 \\ \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 + \ldots + \alpha_{2n}\xi_n = \beta_2 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \alpha_{m1}\xi_1 + \alpha_{m2}\xi_2 + \ldots + \alpha_{mn}\xi_n = \beta_m \end{array} \right| .$$

16.1. **Bem.:** Im Vergleich zu 10.6 ist hier lediglich n und m vertauscht worden, was nicht wesentlich ist, vgl. dazu auch 14.13.

16.2. **Def.:** Die Matrix $(A|b)$, bei der man die r.S. b als zusätzliche Spalte rechts an A anklebt, heißt erweiterte Matrix des LGS $Ax = b$.

Wir werden im folgenden Lösungskriterien für ein LGS erarbeiten. Offenbar gelingt das, wenn A invertierbar ist, d.h. A^{-1} ex., dann ist $Ax = b \overset{\cdot A^{-1}}{\iff} x = A^{-1} \cdot b$, also haben wir in diesem Fall die Lösungsmenge $\mathbb{L} := \{x \in K^n ; Ax = b\} = \{A^{-1} b\}$.
Wir wollen anhand der Matrix A aber auch in anderen Fällen entscheiden können, ob ein LGS lösbar ist oder nicht (und wenn ja, wie).
Wir wissen ja auch noch nicht, wie A^{-1} berechnet werden könnte, falls existent.

16.3. **Notation:** Jede $m \times n$-Matrix $A = (\alpha_{ij})$ kann man unmissverständlich mit ihren Spalten- bzw. ihren Zeilenvektoren beschreiben:

$$A = (a_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} \text{ mit } a_j := \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \vdots \\ \alpha_{mj} \end{pmatrix} \in K^{m \times 1}$$

$$\text{und } z_i := (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in}) \in K^{1 \times n}$$

Die $a_1, \ldots, a_n$ heißen die Spaltenvektoren, und $z_1, \ldots, z_m$ die Zeilenvektoren von A.

16.4. **Bem.:** Beide Typen von Vektoren vertauschen sich beim Übergang zum Transponierten:

$$A^T = (z_1^T, \dots, z_m^T) = \begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{pmatrix},$$ d.h. die Zeilenvektoren von A^T sind die Transponierten der Spaltenvektoren von A, usw.

16.5. **Def.:** Jeder $m\times n$-Matrix A kann man so die Teilmenge $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq K^{m\times 1} \hat{=} K^m$ des VRs K^m zuordnen und ihre lineare Hülle darin betrachten. Man definiert

Spaltenrang$(A) := \dim L(a_1, \dots, a_n)$.

16.6. **Bem.:** Wegen 14.14.2) ist dies auch der Rang der Matrixmultiplikationsabbildung $g: K^n \to K^m$, $x \mapsto A\cdot x$, denn $\operatorname{im} g = L(a_1, \dots, a_n)$ ⌈haben $a_i := g(e_i) \in \operatorname{im} g$ nach 14.14.2), es folgt „$\supseteq$", da $\operatorname{im}(g)$ UVR, „$\subseteq$": jede LK von (e_i) wird von g auf eine LK von $g(e_i) = a_i$ abgebildet⌋.

16.7. **Def.:** Der Spaltenrang von A heißt auch Rang von A, s. Satz 16.12,

Notation: $\operatorname{rg}(A) :=$ Spaltenrang(A).

16.8. **Satz (Spaltenrang-Satz):** Eine Matrix $A \in K^{m\times n}$ hat genau dann Spaltenrang$(A) = r$, wenn es unter den Spaltenvektoren von A

(i) r linear unabh. Vektoren gibt, und

(ii) je $r+1$ Vektoren linear abh. sind.

Ist dies der Fall und sind r linear unabh. Spaltenvektoren von A gegeben, so ist jeder Spaltenvektor von A eine LK dieser gegebenen Vektoren.

Bew.: Haben: $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ erzeugen $L(a_1, \dots, a_n)$. Nach Basisauswahlsatz gibt es unter den Spaltenvektoren eine Basis, nach Vor. der Länge r. Diese r Basisvektoren von $L(a_1, \dots, a_n)$ sind lin. unabh., und je $r+1$ Spalten-Vektoren sind lin. abh. wegen 11.19. (3). □

16.9. **Bem.:** Danach kann man den Spaltenrang als die maximale Zahl von lin. unabh. Spaltenvektoren bezeichnen. Analoges gilt für den Zeilenrang von A:

16.10. **Def.:** Zeilenrang$(A) := \dim L(z_1, \dots, z_m)$,

analog gilt der Zeilenrang-Satz. (Ersetze in 16.8 überall "Spalte" durch "Zeile").

16.11. **Bem.:** Offenbar ist Zeilenrang$(A) =$ Spaltenrang(A^T),

Spaltenrang$(A) =$ Zeilenrang(A^T).

Zunächst ist nicht zu sehen, dass Spalten- und Zeilenrang übereinstimmen sollte. Dies ist aber so, und diese Tatsache fundamental.

16.12. <u>Satz:</u> Für jede Matrix $A \in K^{m \times n}$ ist Zeilenrang(A) = Spaltenrang(A) = rg(A).

<u>Bew.:</u> Sei $r :=$ Spaltenrang(A), $s :=$ Zeilenrang(A).
Bei Vertauschung der Spalten ändert sich r nicht wegen 16.5,
bei Vertauschung der Zeilen ändert sich s nicht wegen 16.9.
Nach dem Spalten- bzw. Zeilenrangsatz darf man daher Œ annehmen:
(1) Jeder Spaltenvektor ist LK von $a_1, \ldots, a_r$,
(2) die Zeilenvektoren $z_1, \ldots, z_s$ sind linear unabh.

<u>1. Beh.:</u> Es gilt $s \leq r$.
⌈<u>Sonst</u> sei $s > r$. Betr. das homogene LGS $\sum_{i=1}^{s} \alpha_{ik} \xi_i = 0$ für $k = 1, \ldots, r$.
Dieses hat r Gleichungen in den s Unbekannten $\xi_1, \ldots, \xi_s$.
Nach Satz 10.16 gibt es $\xi_1, \ldots, \xi_s \in K$, die nicht alle $= 0$ sind und das LGS lösen.
Nach (1) gibt es $\varrho_{jk} \in K$ mit $a_j = \sum_{k=1}^{r} \varrho_{jk} a_k$ für $j = 1, \ldots, n$.

Speziell gilt $\alpha_{ij} = \sum_{k=1}^{r} \varrho_{jk} \alpha_{ik}$ für $j = 1, \ldots, n$, jedes $i = 1, \ldots, s$.
Mit dem LGS folgt nun für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$:
$$\sum_{i=1}^{s} \xi_i \alpha_{ij} = \sum_{i=1}^{s} \xi_i \sum_{k=1}^{r} \varrho_{jk} \alpha_{ik} = \sum_{k=1}^{r} \varrho_{jk} \underbrace{\sum_{i=1}^{s} \xi_i \alpha_{ik}}_{=0} = 0,$$
so dass $\xi_1 (\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1n}) + \ldots + \xi_s (\alpha_{s1}, \ldots, \alpha_{sn}) = 0$,
also ist $\xi_1 z_1 + \ldots + \xi_s z_s = 0$ im Ꮃ zu (2).⌋

<u>2. Beh.:</u> Es gilt $s = r$. ⌈Die 1. Beh. gilt für alle Matrizen über K,
mit 16.10 folgt daher $r =$ Spaltenrang(A) = Zeilenrang(A^T)
$\leq$ Spaltenrang(A^T) = Zeilenrang$(A) = s$.⌋ □

16.13. <u>Kor.:</u> (i) rg(A^T) = rg(A), (ii) rg$(A) \leq \min\{m, n\}$.

<u>Bew.:</u> (i): Klar mit 16.10 und 16.11, (ii): Spaltenrang$(A) \leq n$, Zeilenrang$(A) \leq m$. □

Die Bestimmung des Rangs einer Matrix dient der Entscheidung, ob ein LGS lösbar ist oder nicht:

16.14. <u>Lösungskriterium für LGSe:</u> $Ax = b$ lösbar $\Leftrightarrow$ rg(A) = rg$(A|b)$ $\Leftrightarrow b \in L(a_1, \ldots, a_n)$.

<u>Bew.:</u> Sei $g: K^n \to K^m$, $x \mapsto Ax$ die Mult. mit A. Dann: $Ax = b \Leftrightarrow b \in \operatorname{im}(g) = L(a_1, \ldots, a_n)$, vgl. 16.6.,
$\Leftrightarrow L(a_1, \ldots, a_n) = L(a_1, \ldots, a_n, b) \Leftrightarrow \dim L(a_1, \ldots, a_n) = \dim L(a_1, \ldots, a_n, b) \Leftrightarrow$ rg(A) = rg$(A|b)$. □

Der Rang einer Matrix ist die Dimension des von den Spaltenvektoren (oder Zeilenvektoren!) der Matrix aufgespannten Unterraumes.

Mit dem Rang beschreiben wir nun die Struktur der Lösungsmenge eines beliebigen LGS.

16.15. <u>Satz:</u> Die Lösungsmenge eines LGS $Ax=b$ mit $A\in K^{m\times n}$, sofern lösbar, ist ein affiner Unterraum des K^n der Dimension $n-\mathrm{rg}(A)$, D.h. $\exists\, a\in K^n$, $\exists\, H$, ein UVR von K^n: $\mathbb{L}=a+H$, $\dim H = n-\mathrm{rg}(A)$; H ist die Lösungsmenge von $Ax=0$.

<u>Bew.:</u> Die Menge $H=\{x\in K^n;\ Ax=0\}$ der Lösungen des homogenen Systems $Ax=0$ ist ein UVR des K^n, da $H=\mathrm{Ker}(g)$ mit der Matrixmult.abb. $g: K^n\to K^m, x\mapsto Ax$.
Ist $a\in K^n$ eine Lösung von $Ax=b$, so ist $\mathbb{L}=a+H$. ⌜Sei $y=x-a$, dann ist $b=Ax=A(y+a)=Ay+A\cdot a=Ay+b$. Also ist $Ax=b \Leftrightarrow Ay=0$.⌟
Also ist $\mathbb{L}$ affiner Unterraum der Dimension $\dim H=\dim \mathrm{Ker}(g)$ $=n-\dim \mathrm{im}(g)=n-\mathrm{rg}(g)$ laut <u>Rangsatz 13.10.</u> □

16.16. <u>Kor.:</u> Ein quadratisches LGS $Ax=b$ (d.h. mit $m=n$) ist <u>eindeutig</u> lösbar $\Leftrightarrow \mathrm{rg}(A)=n$.

<u>Bew.:</u> Wegen 16.15 muss nur die Lösbarkeit gezeigt werden, falls $\mathrm{rg}(A)=n$ ist.
Die Spaltenvektoren $a_1,\dots,a_n$ sind dann lin. unabh. wegen $\mathrm{im}(g)=L(a_1,\dots,a_n)$.
Mit $n=\dim K^n$ ist $a_1,\dots,a_n$ also Basis des K^n, insb. erzeugen die Spaltenvektoren den K^n, also folgt $b\in K^n=L(a_1,\dots,a_n)=\mathrm{im}(g)$, also ist $Ax=b$ lösbar. □

Wir geben dazu eine Zusammenfassung zur Existenz einer inversen Matrix wie folgt:

16.17. <u>Satz:</u> Für eine quadratische Matrix $A\in K^{n\times n}$ sind äquivalent:

(1) A ist invertierbar, d.h. ex. eine Matrix $B\in K^{n\times n}$ mit $AB=BA=I_n$,
(2) Die Matrixmultiplikationsabb. $K^n\to K^n$, $x\mapsto Ax$, ist bijektiv,
(3) Die Matrixmultiplikationsabb. $K^n\to K^n$, $x\mapsto Ax$, ist surjektiv,
(4) Die Matrixmultiplikationsabb. $K^n\to K^n$, $x\mapsto Ax$, ist injektiv,
(5) Die Spalten von A bilden eine Basis des $K^{n\times 1}$,
(6) Die Zeilen von A bilden eine Basis des $K^{1\times n}$,
(7) $\mathrm{rg}(A)=n$,
(8) ex. eine Matrix $B\in K^{n\times n}$ mit $A\cdot B=I_n$,
(9) ex. eine Matrix $B\in K^{n\times n}$ mit $B\cdot A=I_n$.
$\Big\}$ dann ist $B=A^{-1}$

Bew.: • (2) ⇒ (1) aus Satz 15.9, (2) ⇒ (3) klar, (2) ⇒ (4) klar,
(3) ∧ (4) ⇒ (2) klar, (3) ⇔ $\mathrm{im}(A) = K^m$ ⇔ $\ker(A) = \{0\}$ ⇔ (4),
[$\mathrm{rg}(A) + \dim\ker(A) = n$, Rangsatz 13.10]
also (2) ⇒ (3) ⇒ (4) ⇒ (3) ∧ (4) ⇒ (2),
d.h. (2), (3), (4) sind äquivalent.

• (1) ⇒ (8) klar, (1) ⇒ (9) klar,
(8) ⇔ ex. Rechtsinverse $\overset{6.16}{\Leftrightarrow}$ (3), (9) ⇔ ex. Linksinverse $\overset{6.15}{\Leftrightarrow}$ (4),
d.h. (1), (2), (3), (4), (8), (9) sind äquivalent.

• (7) ⇔ (5) aus Bew. von 16.16, (7) ⇔ (6) wegen Satz 16.12 (Zeilenrang = Spaltenrang),
(7) ⇔ $\mathrm{im}(A) = K^m$ ⇔ (3). □

16.18 **Explizite Rangbestimmung:** Wir haben in 10.10 bewiesen, dass sich die Lösungsmenge eines LGS bei elementaren Zeilenumformungen (A), (B), (C), (C') nicht ändert. Damit bleibt auch die Dimension des Lösungsraumes, also bleibt nach 16.15 auch $n - \mathrm{rg}(A)$ erhalten. Fazit: Der Rang einer Matrix ändert sich nicht, wenn eine der elementaren Zeilenumformungen ausgeführt wird. Wegen Zeilenrang = Spaltenrang = Rang gilt dies aber ebenso für Spaltenumformungen! Dies liefert uns folgende **Methode zur Rangbestimmung:** Bringe eine Matrix durch elementare Zeilen- und Spaltenumformungen auf möglichst einfache Gestalt. Die maximale Anzahl lin. unabh. Zeilen (oder Spalten) ist der Rang und lässt sich leicht ablesen. Durch systematische Anwendung dieser Umformungen (s.u. 16.25) kommt man aber stets zur folgenden Matrixform, an der man den Rang sofort abliest.

16.19 **Satz:** Sei $A \in K^{m\times n}$ und g die zugeh. Matrixmult. abb. $g: K^n \to K^m$, $x \mapsto Ax$. Dann gibt es Basen $\mathcal{B} \subseteq K^n$, $\mathcal{C} \subseteq K^m$, so dass ${}_{\mathcal{C}}[g]_{\mathcal{B}} = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$ ist mit $r = \mathrm{rg}(A)$.

Bew.: Für die fraglichen Basen $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ und $\mathcal{C} = (v_1, \dots, v_m)$ muss gelten, dass $g(u_j) = v_j$, $j = 1, \dots, r$, $g(u_j) = 0$, $j = r+1, \dots, n$. Im Rangsatz 13.10 hatten wir diese konstruiert: $(u_1, \dots, u_n)$ so, dass $(u_1, \dots, u_s)$ Basis von $\ker(g)$ ist und $(g(u_{s+1}), \dots, g(u_n))$ Basis von $\mathrm{im}(g)$. Die letztere wird noch zu einer Basis von K^m ergänzt. □

16.20 Wir behandeln jetzt, wie man generell ein LGS der Form $Ax=b$ explizit löst. Man verwendet Zeilenumformungen (A), (B), (C), (C') und bringt die Matrix in Zeilenstufenform. a): Löse diese dann von unten nach oben nach den Variablen an den Stufenrändern auf. Oder b): Wandle die Spaltenvektoren der Stufenränder von rechts nach links (ebenfalls durch elementare Zeilenumformungen) zu Einheitsvektoren um, so dass daran die Lösung direkt abgelesen werden kann. ($\rightsquigarrow$ "reduzierte Zeilenstufenform")

16.21 **Def.:** Eine Matrix $A \in K^{m \times n}$ heißt in Zeilenstufenform vorliegend, falls A die folgende Gestalt hat:

$$A = \begin{bmatrix} 0 \cdots 0 & 1 & * & * & * & * & \cdots \\ & & & 1 & * & * & \cdots \\ & & & & 1 & \cdots & \\ & & & & & 1 & * \\ & 0 & & & & & 1 \; * \; * \\ & & & & & & \end{bmatrix}$$

$*$ bezeichnet beliebige Elemente aus K, die Stufenränder bilden die $1 \in K$, darunter stehen nur Nullen

Bem.: Gelegentlich wird die Zeilenstufenform auch Treppennormalform genannt. Stehen über den 1en nur 0en, heißt sie auch reduzierte Zeilenstufenform (oder Normalform).

16.22. 1) Bsp.: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} & 4 & -2 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{5 \times 6}$ ist in Zeilenstufenform $\rightsquigarrow$ freie Parameter: ξ_4, ξ_6, Rang 4

2.) Bsp.: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-3) \quad \cdot(-4) \\ + \\ + \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & -5 & -4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 2 & -5 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-2) \\ + \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ |:5 \end{array}$

Auflösen wie a): 3. Zeile: $5\xi_3 = 5 \rightsquigarrow \xi_3 = 1$, 2. Zeile: $\xi_2 - 5 \cdot 1 = -4 \rightsquigarrow \xi_2 = 1$,
1. Zeile: $1 \cdot \xi_1 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 1 \rightsquigarrow \xi_1 = -1$, Lösung: $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Auflösen wie b): $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ + \\ \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ |\cdot\frac{1}{5} \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ \\ \cdot(-2) \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

$\hookrightarrow$ gelangen zu einer reduzierten ZSF, hier die Einheitsmatrix I_3 ($= I_3$)

16.23. Wie gelangt man systematisch zu einer Zeilenstufenform (nur unter Verwendung elementarer Umformungen)? Das Verfahren geht auf C.F. Gauß (1777–1855) zurück und ist bekannt als Gaußsches Eliminationsverfahren bzw. Gaußscher Algorithmus: Wir beschreiben den Algorithmus für Matrizen $A \in K^{m \times n}$.
Die Idee ist dabei, das Prinzip im induktiven Beweis von Satz 10.16 zu einem Verfahren umzuformulieren.

16.24. **Gaußsches Eliminationsverfahren** (Grundform unter ausschließlicher Verwendung von Zeilenumformungen):

1. Schritt: • Ist in der 1. Spalte von A mind. ein Eintrag $\neq 0$, kann durch ev. Vertauschen der Zeilen, d.h. Umformung (A), erreichen, dass $\alpha_{11} \neq 0$.

• Besteht die 1. Spalte nur aus Nullen, gehe zum 3. Schritt.

2. Schritt: Addiere das $(-\alpha_{i1})$-fache der 1. Zeile zum α_{11}-fachen der i-ten Zeile, $i=2,\dots,m$; beachte $\alpha_{11} \neq 0$ (Umformung (C')). Multipliziere die 1. Zeile mit $\frac{1}{\alpha_{11}}$ (Umformung (B), $\alpha_{11} \neq 0$). Danach hat die 1. Spalte die Form des 1. Einheitsvektors $\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$.

3. Schritt: • Falls die 1. Spalte nur aus Nullen besteht, ersetze A durch die

$$\text{Restmatrix } \begin{bmatrix}\alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn}\end{bmatrix} \in K^{m\times(n-1)}.$$

• Falls die 1. Spalte $\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$ ist,
ersetze A durch die Restmatrix $\begin{bmatrix}\alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n}\\ \vdots & & \vdots\\ \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn}\end{bmatrix} \in K^{(m-1)\times(n-1)}$.

4. Schritt: Gehe zurück zum 1. Schritt, der dann mit der Restmatrix angewendet wird usw. Das Verfahren endet, wenn im 3. Schritt keine Restmatrix mehr gebildet werden kann, was nach spätestens n-maligem Anwenden der Fall ist, da jedesmal eine Spalte (und ev. eine Zeile) gestrichen wird. Setzen wir dann zuletzt alle im 3. Schritt gestrichenen Zeilen und Spalten, die beim Weiterlaufen des Algorithmus unverändert geblieben sind, zusammen, ergibt sich eine Zeilenstufenform wie in Def. 16.21.

16.25. Bem.: 1.) Das Verfahren, auf eine erweiterte Matrix $(A|b)$ angewandt, liefert konkret die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems $Ax=b$.

2.) Rangbestimmung: Vertauscht man in der Beschreibung 16.24 des Gauß-Algos "Zeilen" durch "Spalten" und umgekehrt, gelangt man zum Algorithmus für Spaltenumformungen. Wegen Zeilenrang = Spaltenrang dürfen zur Rangbestimmung auch solche Umformungen gemacht werden. Führt man 16.24 für Zeilen- und Spaltenumformungen durch, liegt die Endmatrix sowohl in Zeilenstufenform als auch in Spaltenstufenform vor, also genau so wie in 16.19, wo der Rang r direkt abgelesen werden kann als Anzahl der 1en in der Endmatrix. Beachten: Spaltenumformungen sind einsetzbar zur Rangbestimmung, aber nicht zur LGS-Lösung/Kernberechnung!

3) <u>Invertierung von Matrizen:</u> Geg. $A \in K^{m \times m}$, gesucht: $X \in K^{m \times m}$ mit $A \cdot X = I_m$.
Auch dafür kann das Gauß-Verfahren eingesetzt werden, denn zur Bestimmung von X sind die Spalten von X ermittelbar als Lösung der jeweiligen

$$\text{LGSe } A \cdot \begin{pmatrix} \xi_{11} \\ \vdots \\ \xi_{m1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A \cdot \begin{pmatrix} \xi_{12} \\ \vdots \\ \xi_{m2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, A \cdot \begin{pmatrix} \xi_{1m} \\ \vdots \\ \xi_{mm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

<u>Methode:</u> Gaußsches Eliminationsverfahren (für Zeilen) mit erweiterter Matrix $(A \mid I_m)$.
Denn: behandeln so alle rechten Seiten $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_m = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ gleichzeitig!
Dieses wandelt $(A \mid I_m)$ um in $(I_m \mid A')$, falls A invertierbar ist:
a) Wird auf der l.S. die Einheitsmatrix erzeugt, ist A inv'bar, und auf der r.S. steht die inverse Matrix, d.h. $A^{-1} = A'$.
[Für jede Spalte e_i von I_m wird $A \cdot x_i = e_i$ separat gelöst zu $x_i = A' \cdot e_i$, d.h. $X = A'$.]
b) Lässt sich die l.S. <u>nicht</u> auf die Einheitsmatrix I_m bringen, ist A <u>nicht</u> invertierbar, hat also keine inverse Matrix. [klar]

<u>Bsp.:</u> $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, ist A invertierbar? Was ist A^{-1}?

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \checkmark$$

16.26. <u>Merkregel</u> zum Invertieren von Matrizen $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K^{2 \times 2}$ mit $ad - bc \neq 0$:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

<u>Beweis:</u> $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & -ab+ba \\ cd-dc & -bc+da \end{pmatrix} = (ad-bc) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. □

16.27. <u>Rechenregeln zur Invertierung und Transponierung quadratischer Matrizen:</u> $A, B \in K^{m \times m}$
(a) Sind A, B invertierbar, so auch AB, und es ist $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$. (Reihenfolge!)
(b) Ist A invertierbar, so auch A^T, und es ist $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
<u>Bew.:</u> (a): $(B^{-1} A^{-1}) \cdot (AB) = B^{-1} (A^{-1} A) B = B^{-1} B = I_m$.
(b): $(A^{-1})^T \cdot A^T = (A \cdot A^{-1})^T = I_m^T = I_m$ wegen 16.28. □

16.28. <u>Bem.:</u> Für $A \in K^{m \times m}$, $B \in K^{m \times k}$ gilt $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$. (Reihenfolge!)
<u>Bew.:</u> Für die zugeh. Matrixabb. $g: x \mapsto Ax$, $f: x \mapsto Bx$ gilt $(g \circ f)^T = f^T \circ g^T$ nach 15.14.
Dann 15.16 und 15.7. Man kann 16.28 aber auch direkt nachrechnen. □