Vorlesung Lineare Algebra I

SoSe'24 hhu
K. Halupczok

§4: Lineare Abbildungen und Matrizen

L17: Basiswechsel

Stichworte: Basiswechsel, Matrixdarstellungen zu verschiedenen Basen, Basiswechselsatz, Spezialfälle, äquivalente und ähnliche Matrizen, Rang äquivalenter Matrizen

---

17.1. Bem. zur Darstellung einer lin. Abb. $f: V \to W$ als Matrix ${}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}}: K^n \to K^m$:

1.) L14.23: Die Matrix stellt die lin. Abb. dar, d.h. ${}_{\mathcal{C}}[f(v)] = {}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}[v]$ für alle $v \in V$, d.h. multipliziert man die Matrix ${}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}}$ mit dem Koordinatenvektor von v bzgl. $\mathcal{B}$, so erhält man das Bild $f(v)$, und zwar als Koordinatenvektor bzgl. $\mathcal{C}$.

2.) L14.25: Bei der Matrixdarstellung ${}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}}$ einer lin. Abb. $f: V \to W$ kommt es auf die Basen $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ an! Auch die Reihenfolge der Basiselemente spielt eine Rolle, deswegen nimmt man für $\mathcal{B}$ bzw. $\mathcal{C}$ (geordnete) Tupel von Basiselementen, etwa $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$.

3.) L15.5: Die Matrixdarstellungen linearer Abb. stellen diese eindeutig dar: Die Abb. $\mathrm{Hom}(V,W) \to K^{m \times n}$, $f \mapsto {}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}}$ ist für jede Basiswahl $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ ein Isomorphismus.

Wir behandeln in diesem Kapitel das Problem des Basiswechsels. Dafür halten wir die folgenden Konventionen fest:

17.2. Ausgangslage: Seien V, W beides K-Vektorräume, gegeben sei eine lineare Abbildung $f: V \to W$ mit Basen $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ von W ($\dim W = m$), und Basen $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ von V ($\dim V = n$).

Können dann jeweils die Matrixdarstellungen ${}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}}$, ${}_{\mathcal{C}'}[f]_{\mathcal{B}'} \in K^{m \times n}$ bilden. Problemstellung: Wie hängen die beiden Matrizen zusammen? Kann man die eine Matrixdarstellung in die andere umrechnen?

L17

– 2 –

17.3. Situation:

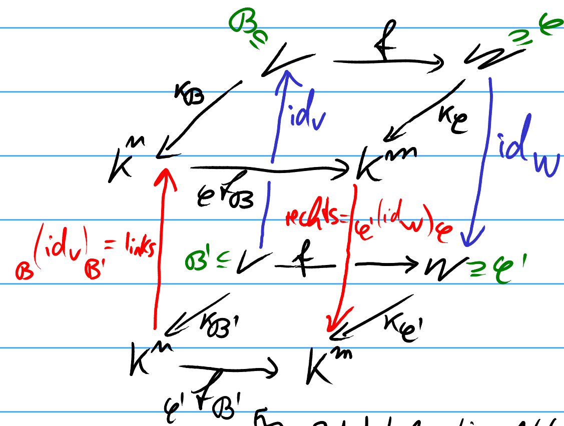
Wir haben die Matrixdarstellungen ${}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}}$, ${}_{\mathcal{C}'}[f]_{\mathcal{B}'}$ beschrieben mit den Diagrammen

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B} \subseteq V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\kappa_{\mathcal{B}}"'] \arrow[dr, phantom, "/\!/"] & W \supseteq \mathcal{C} \arrow[d, "\kappa_{\mathcal{C}}"] \\ K^n \arrow[r, "{}_{\mathcal{C}}f_{\mathcal{B}}"'] & K^m \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd} \mathcal{B}' \subseteq V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\kappa_{\mathcal{B}'}"'] \arrow[dr, phantom, "/\!/"] & W \supseteq \mathcal{C}' \arrow[d, "\kappa_{\mathcal{C}'}"] \\ K^n \arrow[r, "{}_{\mathcal{C}'}f_{\mathcal{B}'}"'] & K^m \end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow$ Matrix: ${}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}}$ (Spalten sind Bilder von der Einheitsvektoren) ${}_{\mathcal{C}}f_{\mathcal{B}}$

$\rightsquigarrow$ Matrix: ${}_{\mathcal{C}'}[f]_{\mathcal{B}'}$ (Spalten sind Bilder von der Einheitsvektoren) ${}_{\mathcal{C}'}f_{\mathcal{B}'}$

Wir legen die Diagramme übereinander (das linke genau über das rechte) und wählen als Verbindungsabbildungen zwischen V, V und W, W die Identitätsabbildungen id_V, id_W:



$\rightsquigarrow$? Welche lin. Abb. ist hier?

Die rot dargestellten Abb.en $K^n \to K^n$ und $K^m \to K^m$ sind links ${}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V)_{\mathcal{B}'}$ und rechts ${}_{\mathcal{C}'}(\mathrm{id}_W)_{\mathcal{C}}$, denn dort, auf der linken und rechten "Seitenfläche" des Diagrammwürfels werden id_V und id_W bezüglich den verschiedenen Basen $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ und $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ dargestellt.

17.4. Def.: Die zugehörigen Matrizen ${}_{\mathcal{B}'}[\mathrm{id}_V]_{\mathcal{B}}$ und ${}_{\mathcal{C}'}[\mathrm{id}_W]_{\mathcal{C}}$ heißen Basiswechselmatrizen.

Bem.: ${}_{\mathcal{B}}[\mathrm{id}_V]_{\mathcal{B}'} = {}_{\mathcal{B}'}[\mathrm{id}_V]_{\mathcal{B}}^{-1}$ vgl. 17.7. 1.)

17.5. Beobachtung: Der Koordinatenvektor, der $v_j \in \mathcal{B}$ zu der Basis $\mathcal{B}'$ darstellt, ist die j-te Spalte von ${}_{\mathcal{B}'}[\mathrm{id}_V]_{\mathcal{B}}$. $\left[\mathrm{id}(v_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} v_i' \rightsquigarrow {}_{\mathcal{B}'}[\mathrm{id}_V]_{\mathcal{B}} = (\lambda_{ij}), \text{14.21}\right]$

Der Basiswechsel ergibt sich nun durch den

17.6. Basiswechselsatz: (Basiswechselformel)

$$\boxed{{}_{\mathcal{C}'}[f]_{\mathcal{B}'} = {}_{\mathcal{C}'}\underbrace{[\mathrm{id}_W]_{\mathcal{C}} \cdot {}_{\mathcal{C}}}_{\text{"}\mathcal{C}\text{ kürzt sich"}}[f]\underbrace{{}_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}}_{\text{"}\mathcal{B}\text{ kürzt sich"}}[\mathrm{id}_V]_{\mathcal{B}'}}$$

Bew.: Beachten die "Vorderseite" des Diagrammwürfels, wo ${}_{\mathcal{E}'}f_{\mathcal{B}'} = {}_{\mathcal{E}'}(id_W)_{\mathcal{E}} \circ {}_{\mathcal{E}}f_{\mathcal{B}} \circ {}_{\mathcal{B}}(id_V)_{\mathcal{B}'}$.
Die Hintereinanderausführung dieser linearer Abb.en, die durch Matrizen ${}_{\mathcal{E}'}[id_W]_{\mathcal{E}}$ und ${}_{\mathcal{E}}[f]_{\mathcal{B}}$ und ${}_{\mathcal{B}}[id_V]_{\mathcal{B}'}$ gegeben sind, entspricht genau deren Matrixprodukt! (nach 15.7)
Somit ist

$$r.S. = {}_{\mathcal{E}'}[id_W \circ f \circ id_V]_{\mathcal{B}'} = {}_{\mathcal{E}'}[f]_{\mathcal{B}'} = l.S. \qquad \square$$

17.7. **Spezialfälle:** 1.) Ist $f: V \to V$ Endo, und $S := {}_{\mathcal{B}}[id_V]_{\mathcal{B}'}$ die Basiswechselmatrix zu den Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$, so ist ${}_{\mathcal{B}'}[id_V]_{\mathcal{B}} = S^{-1}$ die inverse Matrix [in BWSatz $f = id_V$ einsetzen!].
Der BWSatz lautet dann ${}_{\mathcal{B}'}[f]_{\mathcal{B}'} = S^{-1} \cdot {}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}} \cdot S$ [d.h. die Darstellmatrizen sind ähnlich, s. 17.8.2)]
Basiswechselmatrizen von Endos sind invertierbar.

2.) Ist $g: K^n \to K^m$, $g(x) = Ax$, so ist $A = {}_{\tilde{\mathcal{E}}}[g]_{\mathcal{E}}$ mit den Einheitsvektorenbasen $\tilde{\mathcal{E}}$ von K^m und $\mathcal{E}$ von K^n, da ${}_{\tilde{\mathcal{E}}}[g(x)] = {}_{\tilde{\mathcal{E}}}[g]_{\mathcal{E}} \cdot \overbrace{{}_{\mathcal{E}}[x]}^{=x}$.

3.) Ist $f: K^n \to K^n$ linear, so ist die Basiswechselmatrix $S := {}_{\mathcal{E}}[id]_{\mathcal{B}}$ zu einer Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ die daraus gebildete Matrix $S = (v_1 | \dots | v_n)$ mit den v_i als Spalten, denn $v_i = id(v_i) = {}_{\mathcal{E}}[id]_{\mathcal{B}} \cdot \overbrace{{}_{\mathcal{B}}[v_i]}^{=e_i}$.
Einheitsvektorenbasis
Sei A die Matrix, die f beschreibt, also $f(x) = A \cdot x$ (bzgl. $\mathcal{E}, \mathcal{E}$).
Der BWSatz lautet dann ${}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}} = S^{-1} A S$.

17.8. **Def.:** 1.) Zwei Matrizen $A, B \in K^{m \times n}$ heißen äquivalent, wenn es invertierbare Matrizen $S \in K^{n \times n}$, $R \in K^{m \times m}$ gibt mit $B = R^{-1} A S$.
2.) Zwei Matrizen $A, B \in K^{n \times n}$ heißen ähnlich, wenn es eine invertierbare Matrix $S \in K^{n \times n}$ gibt mit $B = S^{-1} A S$.

17.9. **Kor.:** 1.) Die Matrixdarstellungen einer lin. Abb. $f: V \to W$ sind alles (zueinander) äquivalente Matrizen.
2.) Die Matrixdarstellungen eines Endos $f: V \to V$ sind alles ähnliche Matrizen.

Bew.: Klar mit 17.7.1) und 3.), und der Def. 17.8. Bemerken noch dass Äquivalenz von Matrizen transitiv ist: $B = R^{-1} A S$ und $C = U^{-1} B V$ zeigt $C = R^{-1} U^{-1} A S V$, also $C = (UR)^{-1} A (SV)$. Entsprechend ist die Ähnlichkeit von Matrizen transitiv. $\square$

Folgerungen aus dem BWSatz zur Matrizentheorie:

17.10 Satz: Durch elementare Zeilen- oder Spaltenumformungen geht eine Matrix $A \in K^{m\times n}$ in eine äquivalente Matrix über. (ohne Beweis)

Denn: A ist die Abb.matrix der lin. Abb. $f: K^n \to K^m$, $x \mapsto Ax$ bzgl. den Einheitsvektorenbasen. Es gilt (ohne Beweis, geht mit "Elementarmatrizen"):
Elementare Zeilenumformungen entsprechen Basiswechsel in K^m,
Elementare Spaltenumformungen entsprechen Basiswechsel in K^n.

17.11 Satz: Jede Matrix $A \in K^{m\times n}$ ist zur Matrix in der Form $\left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$ äquivalent ($r = rg(A)$), d.h. es gibt invertierbare Matrizen $S \in K^{n\times n}$, $R \in K^{m\times m}$ mit $R^{-1}AS = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$.

Bew.: Sei $g: K^n \to K^m$, $x \mapsto Ax$ die zu A gehörige lineare Abbildung, haben $A = {}_{\tilde{\mathcal{E}}}[g]_{\mathcal{E}}$, wo $\mathcal{E}$ die Einheitsvektorenbasis von K^n und $\tilde{\mathcal{E}}$ die von K^m ist, nach 17.7.2).
Nach 16.19 gibt es Basen $\mathcal{B} \subseteq K^n$, $\mathcal{C} \subseteq K^m$ mit ${}_{\mathcal{C}}[g]_{\mathcal{B}} = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$, $r = rg(A)$.
Nach dem BWSatz 17.6 ist ${}_{\mathcal{C}}[g]_{\mathcal{B}} = R^{-1}\, {}_{\tilde{\mathcal{E}}}[g]_{\mathcal{E}}\, S$ mit $R^{-1} = {}_{\mathcal{C}}[id_{K^m}]_{\tilde{\mathcal{E}}}$, $S = {}_{\mathcal{E}}[id_{K^n}]_{\mathcal{B}}$ □

17.12 Bem.: Nach Satz 17.10 kann diese Form durch Zeilen- und Spaltenumformungen erreicht werden. Dies verifiziert (nachträglich) das Gaußeliminationsverfahren zur Rangbestimmung in 16.25.

17.13 Satz: Zwei Matrizen $A, B \in K^{m\times n}$ sind äquivalent $\Leftrightarrow rg(A) = rg(B)$.

Bew.: Nach 17.11 ist A äqu. $\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ mit $r = rg(A)$, B äqu. $\left(\begin{array}{c|c} I_s & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ mit $s = rg(B)$.
Somit: A äqu. B $\Leftrightarrow \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ äqu. $\left(\begin{array}{c|c} I_s & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow r = s$, da Äquivalenz von Matrizen transitiv ist, vgl. Bew. von 17.9. □

17.14 Bem.: In Sätzen 17.11/17.13 ist mit "Rang" der Rang der zugeh. Matrixabbildung, also eigentlich der Spaltenrang gemeint. Beachtet man dies, erhalten wir einen neuen Beweis von Zeilenrang = Spaltenrang (16.12): $Sprg(A) \overset{17.11}{\underset{17.13}{=}} Sprg(I_r) = Zlrg(I_r)$

$$= Sprg(I_r^T) \overset{17.13}{=} Sprg((R^{-1}AS)^T) \overset{16.28}{=} Sprg(S^T A^T (R^{-1})^T) \overset{17.13}{=} Sprg(A^T) = Zlrg(A). \quad \square$$

17.15 <u>Bsp. für Durchführung eines Basiswechsels</u>: Betr. das Bsp. 14.22:

$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}x-y\\0\\x+y\end{pmatrix}$ hat bzgl. den Basen $\mathcal{B}=\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$ und $\mathcal{C}=\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ die Darstellung $f_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(x)=A\cdot x$ mit ${}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}}=A=\begin{pmatrix}0&-2\\1&2\\0&0\end{pmatrix}$,

denn $f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=0\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\rightsquigarrow K_{\mathcal{C}}(f(v_1))=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

und $f\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}=(-2)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\rightsquigarrow K_{\mathcal{C}}(f(v_2))=\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}$.

Jetzt Umrechnung auf die Basen $\mathcal{B}'=\Big(\underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}_{v_1'},\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}}_{v_2'}\Big)$ und $\mathcal{C}'=\Big(\underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}_{w_1'},\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}}_{w_2'},\underbrace{\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}}_{w_3'}\Big)$:

Basiswechselmatrizen ${}_{\mathcal{B}}[id_{\mathbb{R}^2}]_{\mathcal{B}'}$ und ${}_{\mathcal{C}'}[id_{\mathbb{R}^3}]_{\mathcal{C}}$ ausrechnen laut Beobachtung 17.5:

- $id_{\mathbb{R}^2}(v_1')=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=(-1)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$
  $id_{\mathbb{R}^2}(v_2')=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=(-3)\cdot\underset{\uparrow\, v_1}{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}+2\cdot\underset{\uparrow\, v_2}{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}$
  $\Bigg\}\Rightarrow {}_{\mathcal{B}}[id_{\mathbb{R}^2}]_{\mathcal{B}'}=\begin{pmatrix}-1&-3\\1&2\end{pmatrix}$

- $id_{\mathbb{R}^3}(w_1)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=0\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+(-1)\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$
  $id_{\mathbb{R}^3}(w_2)=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+(-1)\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$
  $id_{\mathbb{R}^3}(w_3)=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\cdot\underset{\uparrow\, w_1'}{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}+0\cdot\underset{\uparrow\, w_2'}{\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}}+\frac{1}{2}\cdot\underset{\uparrow\, w_3'}{\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}}$
  $\Bigg\}\Rightarrow {}_{\mathcal{C}'}[id_{\mathbb{R}^3}]_{\mathcal{C}}=\begin{pmatrix}0&1&-\frac{1}{2}\\-1&-1&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

Jetzt:

$${}_{\mathcal{C}'}[f]_{\mathcal{B}'}={}_{\mathcal{C}'}[id_{\mathbb{R}^3}]_{\mathcal{C}}\cdot{}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}}\cdot{}_{\mathcal{B}}[id_{\mathbb{R}^2}]_{\mathcal{B}'}=\begin{pmatrix}0&1&-\frac{1}{2}\\-1&-1&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&-2\\1&2\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&-3\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&3\\0&0\end{pmatrix}$$

⌜Stimmt! Probe: $f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ ✓

und $f\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ ✓⌟

17.16 <u>Bsp. für Spezialfall 17.7.3.)</u>: Betr. $K^n=\mathbb{R}^3$, betr. Basis $\mathcal{B}=\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$:

Dann ist $S:={}_{\mathcal{E}}[id]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $S^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&-1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$ (mit Gaußelimination).

Sei $v\in\mathbb{R}^3$ beliebig. Welche Koordinaten hat v bezüglich $\mathcal{B}$? ${}_{\mathcal{B}}[v]$! Berechnen dies:

Wegen $v={}_{\mathcal{E}}[v]={}_{\mathcal{E}}[id]_{\mathcal{B}}\cdot{}_{\mathcal{B}}[v]\Leftrightarrow{}_{\mathcal{B}}[v]=S^{-1}\cdot v$ kann man mit S^{-1} die Koordinaten von $v\in\mathbb{R}^3$ umrechnen in die (im neuen Koordinatensystem) zur Basis $\mathcal{B}$. Bsp.: $v=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\Rightarrow$

${}_{\mathcal{B}}[v]=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&-1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-4\\3\end{pmatrix}$, stimmt! Probe: $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-4\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.