L18
-1-

Vorlesung Lineare Algebra I

SoSe'24 hhu
K. Halupczok

§5: Endomorphismen

L18: Determinantenfunktionen

Stichworte: Determinantenfunktion, normierte Determinantenfunktion, Eindeutigkeit, Existenz durch Konstruktion, Det eines Endos von K^n bzw. V

18.1. Motivation: Aus L16.26: Eine 2×2-Matrix $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in K^{2\times 2}$ ist genau dann invertierbar, wenn $ad-bc\neq 0$ ist. Man nennt diese Zahl $\in K$ die Determinante von A, in Zeichen: $\det A$. Um diese "Kennzahl" von Matrizen genauer zu untersuchen und in einem allgemeineren Rahmen einzuführen, studieren wir die Eigenschaften von $\det A$: Fasst man $\det A$ als $\det(v_1,v_2)$ auf, wo $A=(v_1|v_2)$, d.h. $v_1=\binom{a}{c}$, $v_2=\binom{b}{d}$ sind die beiden Spalten von A, so gilt:

1.) • $\det(\lambda v_1, v_2)=\lambda\det(v_1,v_2)=\det(v_1,\lambda v_2)$
• $\det(v_1+v_1', v_2)=\det(v_1,v_2)+\det(v_1',v_2)$
• $\det(v_1, v_2+v_2')=\det(v_1,v_2)+\det(v_1,v_2')$
} d.h. $\det(v_1,v_2)$ ist linear in jeder Variablen

2.) v_1, v_2 lin. abh. $\Rightarrow \det(v_1,v_2)=0$

⌜denn $\lambda v_1=v_2$ zeigt $\det(v_1,v_2)=\det(v_1,\lambda v_1)=\lambda\det(v_1,v_1)=\lambda(ac-ca)=0.$⌟

3.) $\det(e_1,e_2)=1$.

Bsp: $\det\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=0$, $\det\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}=4\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}=4\cdot(2\cdot 3-1)=20.$

18.2. Satz (Ex. & Eind. Determinantenfunktion): Zu jedem Körper K und jedem $n\in\mathbb{N}$ ex. genau eine Abb. $\Delta:\underbrace{K^n\times\ldots\times K^n}_{n\text{ mal}}\to K$, $(x_1,\ldots,x_n)\mapsto\Delta(x_1,\ldots,x_n)$ mit folgenden Eigenschaften:

$(K^n)^n$

(D1) Δ ist linear in jedem einzelnen Argument, man sagt n-linear oder n-fach multilinear (für $n=2$ auch bilinear).

⌜d.h. $\forall i=1,\ldots,n$: $\Delta(x_1,\ldots,x_{i-1},\alpha x+\beta y,x_{i+1},\ldots,x_n)=\alpha\Delta(\ldots,x_{i-1},x,x_{i+1},\ldots)+\beta\Delta(\ldots,x_{i-1},y,x_{i+1},\ldots)$⌟

(D2) Sind $x_1,\ldots,x_n$ lin. abhängig, so ist $\Delta(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0$, man sagt alternierend.

(D3) Für die Einheitsvektoren $e_1,\ldots,e_n\in K^n$ ist $\Delta(e_1,e_2,\ldots,e_n)=1$, man sagt normiert.

L18
-2-

18.3. <u>Def. (Determinantenfunktion)</u>: Eine Funktion Δ mit (D1), (D2) heißt **Determinantenfunktion**. Gilt zusätzlich (D3), heißt Δ **normiert**.

Vor dem Beweis von 18.2 zeigen wir ein nützliches Lemma:

18.4. <u>Lemma</u>: Für eine Abb. $\Delta : (K^n)^n \to K$ mit den Eigenschaften (D1), (D2)

(C) ← gelten: (1) Addiert man zu einem Argument ein anderes Argument, so ändert sich der Wert der Det.fkt. nicht,

d.h. $\forall i \neq j: \Delta(\dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots) = \Delta(\dots, x_{i-1}, x_i + x_j, x_{i+1}, \dots)$

(B) ← (2) Multipliziert man <u>ein</u> Argument mit einem Faktor $\lambda \in K$, so multipliziert sich der Wert der Det.fkt. mit λ,

d.h. $\forall i \; \forall \lambda \in K: \Delta(\dots, x_{i-1}, \lambda x_i, x_{i+1}, \dots) = \lambda \Delta(\dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots)$

(A) ← (3) Vertauscht man zwei Argumente, multipliziert sich der Wert der Det.fkt. mit -1,

d.h. $\forall i \neq j: \Delta(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots) = (-1) \cdot \Delta(\dots, x_j, \dots, x_i, \dots)$.

<u>Bew.</u>: (1): Nach (D1) ist $\Delta(\dots, x_j, \dots, x_i + x_j, \dots) = \Delta(\dots, x_j, \dots, x_i, \dots) + \underbrace{\Delta(\dots x_j \dots x_j \dots)}_{=0 \text{ nach } (D2)}$.

(2): ist Spezialfall von (D1),

(3): $\Delta(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots) \overset{(1)}{=} -\Delta(\dots, x_i - x_j, \dots, x_j, \dots) \overset{(1)}{=} -\Delta(\dots, x_i - x_j, \dots, x_j + (x_i - x_j), \dots)$

$= -\Delta(\dots, x_i - x_j, \dots, x_i, \dots) \overset{(1)}{=} \Delta(\dots, -x_j, \dots, x_i, \dots)$

$\overset{(2)}{=} -\Delta(\dots, x_j, \dots, x_i, \dots)$. $\square$

Zunächst zeigen wir die Eindeutigkeit der Determinantenfunktion:

18.5 <u>Satz</u>: Sind Δ, Δ' zwei Determinantenfunktionen auf dem K^n und ist dabei Δ normiert, so ex. ein $c \in K$ mit $\Delta'(x_1, \dots, x_n) = c \cdot \Delta(x_1, \dots, x_n)$ für alle $x_1, \dots, x_n \in K^n$.

18.6. <u>Kor.</u>: Es gibt höchstens eine normierte Determinantenfunktion auf K^n.
⌜Klar, da diese auf $e_1, \dots, e_n$ den Wert 1 annimmt⌟ ⤳ Eind. in 18.2.

<u>Beweis von Satz 18.5</u>: Setzen $c := \Delta'(e_1, \dots, e_n)$ und zeigen damit die Beh. $\Delta'(x_1, \dots, x_n) = c\,\Delta(x_1, \dots, x_n)$, welche trivialerweise für die Einheitsvektoren gilt.

• Sei $(x_1, \dots, x_n) \in (K^n)^n$ lin. abh. Dann gilt $\Delta'(x_1, \dots, x_n) = 0 = c \cdot 0 = c \cdot \Delta(x_1, \dots, x_n)$. ✓

- Sei $(x_1,\dots,x_n)\in(K^n)^n$ lin. unabh. Die Matrix X, die die x_i als Zeilenvektoren hat, ist dann invertierbar nach 16.17. (6). Durch die elementaren Zeilenumformungen (A), (B) und (C) (des Gaußalgorithmus) kann X somit auf die Einheitsmatrix I_n umgeformt werden nach 16.25. (3).
  Dies sind aber gerade die in Lemma 18.4 beschriebenen Umformungen (3), (2), (1), so dass sich
  - bei Umformung (C) die Werte von $\Delta(x_1,\dots,x_n)$ und $\Delta'(x_1,\dots,x_n)$ beide nicht ändern,
  - bei Umformungen (A), (B) die Werte von $\Delta(x_1,\dots,x_n)$ und $\Delta'(x_1,\dots,x_n)$ jeweils um denselben Faktor $\neq 0$ ändern.

Am Ende werden $\Delta(e_1,\dots,e_n)$ bzw. $\Delta'(e_1,\dots,e_n)$ erreicht, wofür die Beh. gilt. Dann muss aber schon zu Beginn $\Delta'(x_1,\dots,x_n)=c\cdot\Delta(x_1,\dots,x_n)$ gewesen sein. □

Nun zur Existenz der Determinantenfunktion:

18.7. Konstruktion:
- Für $n=1$ ist $(K^1)^1=K$ und $\Delta_1:(K^1)^1\to K,\ x:=(\xi)\mapsto\xi$ ist die normierte Determinantenfunktion
- Für $n=2$ sei $x_j=\begin{pmatrix}\xi_{1j}\\ \xi_{2j}\end{pmatrix}$, $j=1,2$ und $\Delta_2:(K^2)^2\to K$, $\Delta_2(x_1,x_2):=\xi_{11}\xi_{22}-\xi_{12}\xi_{21}$ ist die normierte Determinantenfkt., vgl. 18.1.
- Von hier aus konstruieren wir nun rekursiv normierte Determinantenfunktionen für alle $n\in\mathbb{N}$. Zu $n>1$ und $1\le i\le n$ bezeichne P_i die lineare Abbildung

$$P_i:K^n\to K^{n-1},\ x=\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_{i-1}\\ \xi_i\\ \xi_{i+1}\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_{i-1}\\ \xi_{i+1}\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix},$$ die die i-te Komponente löscht.

Weiter sei mit einem $1\le j\le n$ und der (schon konstruierten) Determinantenfunktion Δ_{n-1} auf dem $(K^{n-1})^{n-1}$ für $(x_1,\dots,x_n)\in(K^n)^n$:

$$\Delta_{n-1}^{(ij)}(x_1,\dots,x_n):=\Delta_{n-1}(P_i(x_1),\dots,P_i(x_{j-1}),P_i(x_{j+1}),\dots,P_i(x_n)),$$

man streiche also in allen Vektoren zunächst die i-te Komponente, lasse dann den j-ten Vektor ganz weg und wende darauf Δ_{n-1} an.

Damit gilt:

18.8. <u>Satz:</u> Für jedes $n>1$ gilt: Ist Δ_{n-1} die normierte Determinantenfunktion zu $n-1$, so ist für jedes $i=1,\dots,n$ die Funktion

$$\Delta_n(x_1,\dots,x_n) := \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\, \xi_{ij}\, \Delta_{n-1}^{(ij)}(x_1,\dots,x_n)$$

die normierte Determinantenfunktion zur Dimension n und damit unabhängig von dem gewählten Index i.

<u>Bew.:</u> (D1): Für jedes $k=1,\dots,n$ ist Δ_n linear im k-ten Argument:
Sei $x_k = \alpha x_k' + \beta x_k''$. Dann ist auch $P_i(x_k) = \alpha P_i(x_k') + \beta P_i(x_k'')$.
- Sofern $j \neq k$, d.h. sofern $P_i(x_k)$ in $\Delta_{n-1}^{(ij)}(x_1,\dots,x_n)$ auch tatsächlich benutzt wird, ist wegen (D1) für Δ_{n-1} dann $\Delta_{n-1}^{(ij)}(\dots x_k \dots) = \alpha \Delta_{n-1}^{(ij)}(\dots x_k' \dots) + \beta \Delta_{n-1}^{(ij)}(\dots x_k'' \dots)$.
- Für $j=k$ ist $\Delta_{n-1}^{(ij)}$ unabh. von x_k, haben dafür hier $\xi_{ik} = \alpha \xi_{ik}' + \beta \xi_{ik}''$.
- Folglich ist

$$\begin{aligned}\Delta_n(\dots \alpha x_k' + \beta x_k'' \dots) &= \sum_{j\neq k} (-1)^{i+j}\left(\alpha \Delta_{n-1}^{(ij)}(\dots x_k' \dots) + \beta \Delta_{n-1}^{(ij)}(\dots x_k'' \dots)\right) \\ &\quad + (-1)^{i+k}(\alpha \xi_{ik}' + \beta \xi_{ik}'')\, \Delta_{n-1}^{(ik)}(\dots) \\ &= \alpha \Delta_n(\dots x_k' \dots) + \beta \Delta_n(\dots x_k'' \dots).\end{aligned}$$

(D2): Sind $(x_1,\dots,x_n)$ lin. abh., so ist $\Delta_n(x_1,\dots,x_n)=0$:
- Zeigen zunächst den <u>Spezialfall:</u> Ist $r<s$ und $x_r = x_s$, gilt $\Delta_n(x_1,\dots,x_n) = 0$.
In den Summanden für $j\neq r$, $j \neq s$ kommen dann schon in $\Delta_{n-1}^{(ij)}$ zwei gleiche Argumente vor, so dass diese Terme verschwinden. Ferner ist wegen $x_r = x_s$ auch $\xi_{ir} = \xi_{is} =: \xi_i$, und es bleibt

$$\begin{aligned}\Delta_n(x_1,\dots,x_n) &= (-1)^{i+r}\xi_i\, \Delta_{n-1}^{(ir)}(\dots) + (-1)^{i+s}\xi_i\, \Delta_{n-1}^{(is)}(\dots) \\ &= (-1)^{i+r}\xi_i \left(\Delta_{n-1}^{(ir)}(\dots) + (-1)^{s-r}\Delta_{n-1}^{(is)}(\dots)\right). \qquad \otimes\end{aligned}$$

Wir zeigen, dass der Klammerausdruck verschwindet. Zur Vereinfachung der Notation setzen wir $y_j := P_i(x_j)$ und $y := y_r = y_s$, so haben wir

$$\Delta_{n-1}^{(ir)}(x_1,\dots,x_n) = \Delta_{n-1}(y_1,\dots,y_{r-1},y_{r+1},\dots,y_{s-1},y,y_{s+1},\dots,y_n),$$
$$\Delta_{n-1}^{(is)}(x_1,\dots,x_n) = \Delta_{n-1}(y_1,\dots,y_{r-1},y,y_{r+1},\dots,y_{s-1},y_{s+1},\dots,y_n).$$

Beide Ausdrücke enthalten genau dieselben Argumente, jedoch in anderer Reihenfolge. Vertauscht man in $\Delta_{n-1}^{(is)}$ nach und nach, insg. $(s-r-1)$ mal, das y mit dem jeweils rechts davon stehenden Argument, so erhält man $\Delta_{n-1}^{(ir)}$, und nach Lemma 18.4 (3) bringt jede Vertauschung einen Faktor -1.
Damit ist aber $\Delta_{n-1}^{(ir)}(x_1,\dots,x_n) = (-1)^{s-r-1}\Delta_{n-1}^{(is)}(x_1,\dots,x_n)$, also $\otimes = 0$.

• Jetzt der <u>allgemeine Fall</u>: Sind $(x_1,\dots,x_m)$ lin. abhängig, so lässt sich ein x_r aus den übrigen linear kombinieren (nach 10.21.): $x_r = \sum_{s\neq r} \lambda_s x_s$.

Dann: $\Delta_m(x_1,\dots,x_m) = \Delta_m(x_1,\dots,x_{r-1}, \sum_{s\neq r}\lambda_s x_s, x_{r+1},\dots,x_m)$
$$\overset{(D1)}{=} \sum_{s\neq r} \lambda_s \underbrace{\Delta_m(x_1,\dots,x_{r-1}, x_s, x_{r+1},\dots,x_m)}_{\text{alle } =0 \text{ nach Spezialfall.}}$$

<u>(D3)</u>: Zeigen: $\Delta_m(e_1,\dots,e_m) = 1$. Haben $\xi_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$ (Kroneckersymbol), also ist
$$\Delta_m(e_1,\dots,e_m) = \sum_{j=1}^m \delta_{ij} \Delta_{m-1}^{(ij)}(e_1,\dots,e_m) = \Delta_{m-1}^{(ii)}(e_1,\dots,e_m)$$
$$= \Delta_{m-1}(P_i(e_1),\dots,P_i(e_{i-1}), P_i(e_{i+1}),\dots,P_i(e_m))$$
$$= \Delta_{m-1}\underbrace{(e_1',\dots,e_{m-1}')}_{\text{Einheitsvektoren des } K^{m-1}} = 1. \quad \square$$

$\leadsto$ Ex. in 18.2. $\square\square\square$

18.9. <u>Motivation</u>: Die Determinante eines Endomorphismus $f: K^m \to K^m$:
Bezeichne Δ die nach 18.2 eindeutig bestimmte Determinantenfunktion auf $(K^m)^m$. Ist nun $f: K^m \to K^m$ ein Endo, können wir die Abb.
$$\Delta * f: (K^m)^m \to K,\ (x_1,\dots,x_m) \mapsto \Delta(f(x_1),\dots,f(x_m))$$ bilden.
Es ist leicht zu prüfen, dass $\Delta * f$ m-multilinear und alternierend, also eine Determinantenfunktion ist. Nach Satz 18.5 gilt dann mit $c := \Delta(f(e_1),\dots,f(e_m))$ die Darstellung $(\Delta * f)(x_1,\dots,x_m) = c\cdot\Delta(x_1,\dots,x_m)$.

18.10. <u>Def. und Satz</u>: (Determinante eines Endomorphismus von K^m): Die hier auftretende Konstante c heißt <u>Determinante des Endomorphismus f</u>, Notation: <u>$\det f$</u>, also $\det f := \Delta(f(e_1),\dots,f(e_m))$. Es gilt $(\Delta * f)(x_1,\dots,x_m) = (\det f)\cdot\Delta(x_1,\dots,x_m)$.

18.11. <u>Satz</u> (Eigenschaften von $\det f$): Für Endomorphismen $f,g: K^m \to K^m$ gilt:
(1.) Ist $rg(f) < m$, so ist $\det f = 0$.
(2.) $\det id_{K^m} = 1$ (3.) $\det(g\circ f) = \det g \cdot \det f$.
(4.) $\det f \neq 0 \Leftrightarrow f$ Isomorphismus (in diesem Fall ist $\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det f}$)
(5.) Für einen Isomorphismus g ist $\det(g^{-1}\circ f\circ g) = \det f$.

<u>Bew.:</u> (1.): $\det f = (\Delta * f)(e_1,\dots,e_n) = \Delta(f(e_1),\dots,f(e_n))$. Ist $rg(f) < n$, so sind $(f(e_1),\dots,f(e_n))$ linear abhängig, also ist dies $= 0$.
(2.): $\det id_{K^n} = (\Delta * id_{K^n})(e_1,\dots,e_n) = \Delta(e_1,\dots,e_n) = 1$.
(3.): Nach 18.10 ist $\det(g \circ f) = \Delta(g(f(e_1)),\dots,g(f(e_n)))$
$$= (\Delta * g)(f(e_1),\dots,f(e_n)) = \det g \cdot \Delta(f(e_1),\dots,f(e_n))$$
$$= \det g \cdot \det f \cdot \Delta(e_1,\dots,e_n) = \det g \cdot \det f.$$
(4.): Ist $\det f \neq 0$, so ist wegen (1.) dann $rg(f) = n$, d.h. f ein Isomorphismus. Ist umgekehrt f ein Isomorphismus, so ex. f^{-1} und $f \circ f^{-1} = id_{K^n}$. Dann ist $1 = \det id_{K^n} = \det f \circ f^{-1} = \det f \cdot \det f^{-1}$. Es folgt die Beh.
(5.): $\det(g^{-1} \circ f \circ g) \underset{(3.)}{=} \det(g^{-1}) \cdot \det f \cdot \det g \underset{(4.)}{=} \frac{1}{\det g} \cdot \det f \cdot \det g = \det f$.

$\square$

Wir möchten zuletzt noch beliebige Endomorphismen eines n-dim. K-VRs betrachten:

18.12. <u>Lemma:</u> Sei V ein n-dim. K-VR, sei $f \in Hom(V,V)$ ein Endomorphismus von V, und seien $g, h : K^n \to V$ Isomorphismen. Dann gilt
$$\det(g^{-1} \circ f \circ g) = \det(h^{-1} \circ f \circ h).$$
<u>Bew.:</u> Sei $f_1 := g^{-1} \circ f \circ g$ und $f_2 := h^{-1} \circ f \circ h$. Wegen $g = h \circ h^{-1} \circ g$ folgt
$$f_1 = g^{-1} \circ f \circ g = (h \circ h^{-1} \circ g)^{-1} \circ f \circ (h \circ h^{-1} \circ g) = g^{-1} \circ h \circ \underbrace{h^{-1} \circ f \circ h}_{f_2} \circ h^{-1} \circ g$$
$$= (h^{-1} \circ g)^{-1} \circ f_2 \circ (h^{-1} \circ g).$$ Es folgt die Beh. aus Satz 18.11 (5.).

$\square$

Wir können damit die Determinante eines Endomorphismus von V definieren:

18.13. <u>Def.:</u> Sei V ein K-VR, $\dim V = n$ und $f \in Hom(V,V)$. Weiter sei $g : K^n \to V$ ein Isomorphismus. Dann heißt $\det f := \det(g^{-1} \circ f \circ g)$ die <u>Determinante von f</u>.
<u>Bem.:</u> Diese Definition ist wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Wahl von g nach Lemma 18.12.

18.14. <u>Bem.:</u> Satz 18.11 (Eigenschaften von $\det f$) bleibt gültig, wenn man darin überall den K^n durch einen beliebigen n-dim. K-VR V ersetzt. <u>Bew.:</u> Ü