

Vorlesung Lineare Algebra ISoSe'24 hhu  
K. Halupczok

§5: Endomorphismen

L19: Determinante einer Matrix

Stichworte: Determinante einer Matrix, Entwicklungssatz von Laplace, Streichungsmatrizen, vereinfachtes Gaußeliminationsverfahren, algebraisches Komplement, Cramersche Regel

Mit dem Begriff der Determinante eines Endomorphismus kommen wir direkt zur Determinante einer Matrix als Determinante der zugehörigen Matrixabbildung:

19.1. Def. (Determinante einer Matrix): Eine quadratische Matrix  $A \in K^{n \times n}$  definiert eindeutig einen Endomorphismus  $f_A: K^n \rightarrow K^n, x \mapsto Ax$ .

Dann heißt  $\det A := \det f_A$  die Determinante von A.

19.2. Satz: Für jede Matrix  $A \in K^{n \times n}$  mit Spalten  $a_1, \dots, a_n$  gilt  $\det A = \Delta(a_1, a_2, \dots, a_n)$ .

Bew.:  $\det A = \det f_A \stackrel{18.10}{=} \Delta(f_A(e_1), \dots, f_A(e_n)) = \Delta(Ae_1, \dots, Ae_n) = \Delta(a_1, \dots, a_n)$ , denn Sie wissen ja: die Spalten sind die Bilder der Einheitsvektoren.  $\square$

Wir erhalten sofort die folgenden Eigenschaften:

19.3. Satz: Für  $A, B \in K^{n \times n}$  und die Einheitsmatrix  $I_n \in K^{n \times n}$  gelten

$$(1) \det I_n = 1 \quad (2) \det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

$$(3) \det A = 0 \Leftrightarrow \text{rg}(A) < n$$

$$(4) \det A \neq 0 \Leftrightarrow \text{rg}(A) = n \Leftrightarrow A \text{ invertierbar, vgl. } \underline{16.17}.$$

$$(5) A \text{ invertierbar} \Rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

$$(6) B \text{ invertierbar} \Rightarrow \det(B^{-1} A B) = \det A,$$

d.h. ähnliche Matrizen haben die gleiche Determinante.

Bew.: Der Beweis ist mit Satz 18.11 schon geführt; er überträgt sich direkt auf Matrizen. Insb. für (6) können wir den Beweis analog umschreiben zu  $\det(B^{-1} A B) = \det(B^{-1}) \cdot \det A \cdot \det B = \frac{1}{\det B} \cdot \det A \cdot \det B = \det A$ .  $\square$

19.4. Bem.: Mit die wichtigste Bedeutung von  $\det A$  bzw.  $\det f$  ist die Erkennung von invertierbaren Matrizen bzw. Isomorphismen, denn wir haben also:

Für Endo  $f: V \rightarrow V$  gilt:  $\det f \neq 0 \Leftrightarrow f$  Isomorphismus,

Für  $A \in K^{n \times n}$  gilt:  $\det A \neq 0 \Leftrightarrow$  Mult. mit A ist Isomorphismus  $\Leftrightarrow A$  invertierbar.

Wir beachten den Zusammenhang zwischen der Determinante eines Endomorphismus  $f: V \rightarrow V$  und den Matrixdarstellungen von  $f$ : Alle Abb. Matrizen  ${}_B[f]_B$  zu verschiedenen Basen  $B$  sind ähnlich zu

$A = {}_E[f]_E$  nach 17.9. Also zeigt 19.3 (6):

19.5. Kor. Für einen Endomorphismus  $f: V \rightarrow V$ ,  $\dim V = n$ , und irgendeine Basis  $B$  von  $V$  gilt  $\det f = \det {}_B[f]_B$ .

Würde man  $\det f$  so definieren wie in 19.5, ist dies also wohldefiniert, da von der Basiswahl für  $B$  unabhängig.

19.6. Bsp.: Ist  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K^{2 \times 2}$  eine  $2 \times 2$ -Matrix, ist  $\det A = \det \left( \begin{pmatrix} a & \\ & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} \right) = ad - bc$  laut Konstruktion 18.7, Fall  $n=2$ .

19.7. Bem. Für eine lin. Abb.  $f: V \rightarrow W$ , selbst wenn  $\dim V = \dim W = n$  ist, kann kein  $\det f$  definiert werden: Werden Basen  $B, C$  in  $V, W$  gewählt, kann zwar  $\det {}_C[f]_B$  berechnet werden, bei Basiswechsel zu anderen Basen erhalten wir aber eine dazu äquivalente Matrix  $R^{-1} {}_C[f]_B S$ , wobei  $\det R \neq \det S$  (mit  $B \neq C$ ) zu erwarten ist. Diese hat also i. a. eine andere Determinante als  ${}_C[f]_B$ .

Bsp.:  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(\vec{y}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \vec{y}$ ,  $B = E$ ,  $C = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ :  ${}_C[f]_E = {}_C[id]_E \cdot \underbrace{{}_E[f]_E}_{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}} \cdot \underbrace{{}_E[id]_E}_{I_2}$

mit BWMatrix  ${}_C[id]_E = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$  da  $f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

und  $f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , also

$${}_C[f]_E = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 22 \\ 7 & 15 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} 10 & 22 \\ 7 & 15 \end{pmatrix} = 10 \cdot 15 - 7 \cdot 22 = -4,$$

mit anderer Determinante als  ${}_E[f]_E = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ :  $\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 4 - 6 = -2$ .

Jetzt liefert uns Satz 18.8 eine Rekursionsformel zur Berechnung von  $\det A$ :

19.8. Satz (Entwicklungssatz von Laplace, Entwicklung nach der  $i$ -ten Zeile):

Für eine Matrix  $A = (\alpha_{ij}) \in K^{n \times n}$  und Indizes  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  bezeichne  $A_{ij} \in K^{(n-1) \times (n-1)}$  diejenige Matrix, die aus  $A$  durch Streichen der  $i$ -ten Zeile und der  $j$ -ten Spalte entsteht. Damit gilt für jedes  $i = 1, \dots, n$ :

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \alpha_{ij} \det A_{ij}.$$

Bew.: Wegen Satz 19.2 vergewissern wir uns, dass diese Formel genau die aus Satz 18.8 ist.  $\square$

Bem.: Man nennt die  $A_{ij}$  Streichungsmatrizen und die Streichungsmatrixdeterminanten  $\det A_{ij}$  auch  $(m-1)$ -reihige Unterdeterminanten.

19.9. Bsp.:  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot 4 + (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2,$   
 für  $i=1$ . Bzw.  $i=2$ :  $= (-1)^{2+1} \cdot 3 \cdot 2 + (-1)^{2+2} \cdot 4 \cdot 1 = -6 + 4 = -2.$   
 $\cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 10 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 4 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 7 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = -3.$   
 $\uparrow$   
 $i=1$   $\underbrace{5 \cdot 10 - 6 \cdot 8 = 2}$   $\underbrace{2 \cdot 10 - 3 \cdot 8 = -4}$   $\underbrace{2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 = -3}$

Für die Laplace-Entwicklung von  $\det A$  können auch die Spalten genommen werden:

19.10. Satz: Für  $A \in K^{m \times m}$  mit Spalten  $a_1, \dots, a_m$  und Zeilen  $z_1, \dots, z_m$  gilt  
 $\det A = \Delta(a_1, \dots, a_m) = \Delta(z_1, \dots, z_m).$

Bew.: Nach Satz 19.2 ist  $\det A = \Delta(a_1, \dots, a_m)$ . Genauso gut können wir  $\det A$  als Funktion der Zeilen  $z_1, \dots, z_m$  auffassen, sei diese mit  $\Delta'(z_1, \dots, z_m) := \det A$  bezeichnet. (D.h. setze die Vektoren  $z_1, \dots, z_m$  als Zeilen einer Matrix  $A$  zusammen, und bilde  $\det A$ .) Nach Satz 19.8 haben wir also  $\Delta'(z_1, \dots, z_m) = \sum_{j=1}^m (-1)^{i+j} \alpha_{ij} \det A_{ij}$ . Dieser Ausdruck ist offenbar linear in der  $i$ -ten Zeile. Da  $i$  beliebig war, folgt:

(1.)  $\Delta'(z_1, \dots, z_m) = \det A$  ist linear in jeder Zeile von  $A$ .

Sind die Zeilen von  $A$  linear abhängig, so ist  $\text{rg}(A) < m$  und damit  $\det A = 0$ . Also:

(2.) Sind die Zeilen von  $A$  linear abhängig, gilt  $\Delta'(z_1, \dots, z_m) = 0$ .

Weiter entsteht durch Einsetzen der Einheitsvektoren als Zeilen die Matrix  $I_m$ , also:

(3.)  $\Delta'(e_1, \dots, e_m) = 1$ .

Somit ist  $\Delta' = \Delta$  die normierte Determinantenfunktion nach Satz 18.2.  $\square$

19.11. Im Bsp. 19.9: Entwickeln nach Spalte 2 liefert

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix} = (-1)^{1+2} \cdot 4 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 5 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot 6 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} = -3.$$

$\uparrow$   
 $j=2$   $\underbrace{2 \cdot 10 - 3 \cdot 8 = -4}$   $\underbrace{1 \cdot 10 - 3 \cdot 7 = -11}$   $\underbrace{1 \cdot 8 - 2 \cdot 7 = -6}$

Bem.: Es gibt ausschließlich für  $3 \times 3$ -Matrizen die sog. Regel von Sarrus zur  $\det$ -Berechnung. Wir behandeln diese nicht.

Wir fassen nützliche Rechenregeln zur Berechnung von  $\det A$  zusammen.

19.12. Satz: Für eine Matrix  $A = (\alpha_{kl}) \in K^{n \times n}$  gilt:

- 1.) Ist  $A^T$  die Transponierte Matrix zu  $A$ , gilt  $\det A^T = \det A$ .
- 2.) Statt nach einer Zeile kann auch nach einer Spalte Laplace-entwickelt werden: Es gilt für alle  $j=1, \dots, n$  die Formel  $\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \alpha_{ij} \det A_{ij}$ .
- 3.)  $\det A$  ist linear in jeder Spalte und jeder Zeile von  $A$ , insb.  $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$ .
- 4.) Hat  $A$  zwei gleiche Spalten oder zwei gleiche Zeilen, so ist  $\det A = 0$ .
- 5.) Addiert man zu einer Spalte ein Vielfaches einer anderen Spalte, so ändert sich  $\det A$  nicht. Analog für Zeilen.
- 6.) Vertauscht man zwei Spalten oder zwei Zeilen, so multipliziert sich die Determinante mit  $-1$ .
- 7.) Die Determinante einer Dreiecksmatrix (vgl. 14.9) ist gleich dem Produkt der Diagonaleinträge, d.h.  $\det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = \alpha_{11} \cdot \alpha_{22} \cdot \dots \cdot \alpha_{nn}$ .

Bew.:

Zu 1.): Die Spalten  $z_i$  von  $A^T$  sind die (transponierten) Zeilen  $a_i^T$  von  $A$ , also ist die Beh. klar nach Satz 19.10.

Zu 2.): folgt aus 1.) und dem Laplace-Entwicklungssatz 19.8.

Zu 3.) - 6.): folgt aus Satz 18.2, Def 18.3 zusammen mit Lemma 18.4.

Zu 7.): Ist  $A = (\alpha_{kl})$  eine obere Dreiecksmatrix, so ist  $\alpha_{kl} = 0$  für  $k > l$ .

Entwickeln nach der 1. Spalte liefert  $\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \alpha_{i1} \det A_{i1} = \alpha_{11} \det A_{11}$ .  
 $\stackrel{=0 \text{ für } i > 1}{\text{}}$   
 Da  $A_{11}$  selbst wieder obere Dreiecksmatrix ist, ist also induktiv schon  $\det A_{11} = \alpha_{22} \cdot \alpha_{33} \cdot \dots \cdot \alpha_{nn}$ , es folgt  $\det A = \prod_{i=1}^n \alpha_{ii}$ .  $\square$

19.13. Dieser Satz 19.12 liefert ein Verfahren zur expliziten Berechnung der Determinanten einer Matrix  $A = (\alpha_{ij}) \in K^{n \times n}$ . Wir gehen dafür ähnlich vor wie bei der Gauß-Elimination, um die Matrix auf obere Dreieckform zu bringen, ohne den Wert der Determinante zu ändern.

1. Schritt: • Ist die 1. Spalte von  $A$  der Nullvektor  $0$ , sind die Spalten lin. abh. und  $\det A = 0$ .
- Ist die 1. Spalte  $\neq 0$ , nehmen wir  $\alpha_{11} \neq 0$  an (notfalls Zeilen austauschen und mal  $(-1)!$ ).

Dann kann man von der 2-ten, 3-ten, ..., n-ten Zeile solche Vielfache der 1-ten Zeile abziehen, dass in der 1. Spalte, abgesehen von  $\alpha_{11}$ , sämtliche Einträge = 0.

Dabei ändert sich der Wert der Determinanten nicht. Die so erhaltene Matrix hat die Form  $A' = \left( \begin{array}{c|ccc} \alpha'_{11} & * & \dots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{array} \right)$  mit  $\alpha'_{11} \neq 0$  und nicht näher interessierenden Einträgen  $*$ .

Ferner haben wir  $\det A = (-1)^r \det A' = (-1)^r \alpha'_{11} \det A''_{11}$ ,  $r = \begin{cases} 1, & \text{falls zu Beginn zwei Zeilen vertauscht wurden,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$   
 $\uparrow$  Laplace-Entwicklung

2. Schritt: Für  $A''_{11}$  argumentiere weiter wie eben im 1. Schritt.

• Ist die 1. Spalte von  $A''_{11}$  gleich 0, ist  $\det A''_{11} = 0$ , dann also auch  $\det A = 0$ .

• Ansonsten formen wir  $A'$  um wie im 1. Schritt, erhalten anstelle  $A$  dann

$$A'' = \left( \begin{array}{c|cc} \alpha'_{11} & * & \dots & * \\ \hline 0 & \alpha'_{22} & * & \dots & * \\ \hline 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & & & \end{array} \right), \text{ und } \det A = (-1)^r \alpha'_{11} \alpha'_{22} \det A''_{22},$$

wobei  $r$  die # bisher vertauschter Zeilen angibt.

Durch Iteration dieser Schlussweise erhalten wir das

19.14. Rezept zur Berechnung einer Determinanten: Führe das folgende vereinfachte Gauß-Eliminationsverfahren an der Matrix  $A$  durch: Bringe die Matrix mit Zeilenumformungen (C') auf Dreiecksgestalt, Stufenränder werden nicht auf 1 gebracht. Ist  $C$  dann die erhaltene Dreiecksmatrix (das kann ja auch eine untere  $\Delta$ -Matrix sein), so ist  $\det A = (-1)^r \det C$ , wobei  $r$  die Anzahl der durchgeführten Zeilenumtauschungen ist. Die Determinante von  $C$  berechnet sich dann noch als Produkt der Diagonaleinträge von  $C$ .

Nützlich zur Berechnung sind Rechenregeln, wenn  $A$  in besonderer Form vorliegt, z.B.:

19.15. Satz (Determinante von Kästchenmatrizen):

Ist  $A = \begin{pmatrix} B & O \\ C & D \end{pmatrix}$  mit Matrizen  $B \in K^{m \times m}$ ,  $C \in K^{(m-m) \times m}$ ,  $D \in K^{(m-m) \times (m-m)}$  und der Nullmatrix  $O \in K^{m \times (m-m)}$ , so gilt  $\det A = \det B \cdot \det D$ .

Bew.: Haben  $A = \begin{bmatrix} B & O \\ C & I_{m-m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}$ , dann  $\det$  anwenden und Satz 19.3 (2).

19.16. Bem.: Der Satz gilt natürlich ebenso für  $A = \begin{pmatrix} B & C \\ O & D \end{pmatrix}$ . Nach Betrachtung von  $\det A^T$ .

## Anwendungen der Determinantentheorie

19.17. Def. Sei  $A = (\alpha_{ij}) \in K^{n \times n}$  und  $A_{ij}$  die Streichungsmatrix zu Zeile  $i$ , Spalte  $j$ , so heißt  $\mathcal{V}_{ij}(A) := (-1)^{i+j} \det A_{ij}$  das algebraische Komplement von  $\alpha_{ij}$ .

19.18. Satz: Sei  $A = (\alpha_{ij}) \in K^{n \times n}$ ,  $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T \in K^n$  ein Vektor und  $A_{j,x}$  sei die Matrix, die aus  $A$  durch Ersetzen der  $j$ -ten Spalte durch  $x$  entsteht. Dann gilt  $\det A_{j,x} = \sum_{i=1}^n \xi_i \mathcal{V}_{ij}(A)$ . (Analoges gilt für die Zeilen.)

Bew.: Entwickle  $\det A_{j,x}$  laut 19.12.2) nach der  $j$ -ten Spalte.  $\square$

19.19. Lemma: Ist  $A = (\alpha_{ij}) \in K^{n \times n}$ ,  $a_k$  die  $k$ -te Spalte von  $A$ , so ist für  $j=1, \dots, n$ :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_{ik} \mathcal{V}_{ij}(A) = \begin{cases} \det A, & j=k \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{Analoges für Zeilen})$$

Bew.: Setze in 19.18  $x = a_k$  ein und erhalte  $\det A_{j,a_k}$ , wo man  $A_{j,a_k}$  erhält, indem man in  $A$  die  $j$ -te Spalte durch die  $k$ -te Spalte ersetzt. Für  $j=k$  tut sich dabei nichts und erhält  $A$  selbst, für  $j \neq k$  erhält man eine Matrix mit zwei gleichen Spalten, deren Determinante  $= 0$  ist.  $\square$

Kommen damit zur geschlossenen Darstellung der Inversen einer Matrix:

19.20. Satz: Ist  $A \in K^{n \times n}$  invertierbar und  $\mathcal{V}_{ij}$  das algebraische Komplement, so ist

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (\mathcal{V}_{ij})^T,$$

d.h. nimmt man  $\mathcal{V}_{ij}$  als Matrixeintrag in Zeile  $i$ , Spalte  $j$ , bildet davon die transponierte Matrix und multipliziert mit  $\frac{1}{\det A}$ , erhält man  $A^{-1}$ .

Bew.: Setzen  $D := (\mathcal{V}_{ij})_{i,j}$ , dann ist in  $D^T \cdot A$  der Eintrag in  $(j,k)$  gleich  $\sum_{i=1}^n \mathcal{V}_{ji} \alpha_{ik} \stackrel{19.19}{=} \begin{cases} \det A, & j=k \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ , also kommt für  $D^T \cdot A$  die Matrix  $(\det A) \cdot I_n$  heraus. Es folgt  $\frac{1}{\det A} \cdot D^T = A^{-1}$ .  $\square$

19.21. Bsp.: Hatte  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ , wo  $\mathcal{V}_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \det(d) = d$ ,  $\mathcal{V}_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \det(c) = -c$ ,  
 $\mathcal{V}_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \det(b) = -b$ ,  $\mathcal{V}_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \det(a) = a$ .

Istet  $3 \times 3$ -Matrix:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{V}_{11} & \mathcal{V}_{12} & \mathcal{V}_{13} \\ \mathcal{V}_{21} & \mathcal{V}_{22} & \mathcal{V}_{23} \\ \mathcal{V}_{31} & \mathcal{V}_{32} & \mathcal{V}_{33} \end{pmatrix} \text{ mit } \mathcal{V}_{11} = (-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix}, \\ \mathcal{V}_{12} = (-1)^{1+2} \det \begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix}, \text{ usw.}$$

Lösen eines LGS mit Determinantentheorie im Fall  $n=m$ :

19.22. Cramersche Regel: Ist  $\det A \neq 0$ , so ist die Lösung  $x$  von  $Ax = b$ ,  $A \in K^{n \times n}$ , geg. durch  $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$  mit  $\xi_i = \frac{1}{\det A} \cdot \det A_{i,b}$  für  $i=1, \dots, n$ .

Aber: Konkretes Berechnen der Lösung damit ungeeignet / zu aufwendig, weil Determinantenberechnung zu aufwendig! Lieber Gaußelim. in der Praxis nehmen!

Beweis der Cramerschen Regel: Mit 19.20 folgt  $x = A^{-1}b = \frac{1}{\det A} \cdot (v_{ij})^T \cdot b$ , und ist  $\xi_e \in K$  die  $e$ -te Komponente der Lösung  $x$ , ist  $\xi_e \cdot \det A$  also gleich der  $e$ -ten Komponente des Vektors  $(v_{ij})_{ij}^T \cdot b = (v_{ji})_{ij} \cdot b$ ,

nämlich  $\sum_{j=1}^n v_{je} b_j = \det A_{e,b}$  wegen Satz 19.18.

Jetzt  $\xi_e \det A = \det A_{e,b}$  nach  $\xi_e$  auflösen.  $\square$

19.23. Bsp.: Das LGS  $Ax = b$  mit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ ,  $\det A = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2$  hat den Lösungsvektor  $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$  mit  $\xi_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}}{-2} = -\frac{1}{2} \cdot (5 \cdot 4 - 6 \cdot 2) = -\frac{1}{2} \cdot 8 = -4$ ,  
 $\xi_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}}{-2} = -\frac{1}{2} \cdot (1 \cdot 6 - 3 \cdot 5) = \frac{9}{2}$ , Probe:  $1 \cdot (-4) + 2 \cdot \frac{9}{2} = 5 \checkmark$   
 $3 \cdot (-4) + 4 \cdot \frac{9}{2} = 6 \checkmark$

19.24. Elementargeometrische Anwendung: Sind  $a, b \in K^2$ ,  $a \neq b$ , so liegt ein  $x \in K^2$  genau dann auf der Geraden durch  $a$  und  $b$ , wenn gilt:  $\det \begin{pmatrix} x & a & b \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$ .

Bew.: • Gilt  $x = \alpha a + \beta b$  mit  $\alpha + \beta = 1$ , sind  $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix} \in K^3$  lin. abh., also  $\det(\dots) = 0$ .

• Gilt  $\det \begin{pmatrix} x & a & b \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$ , sind die Vektoren lin. abh., d.h.  $\exists \xi, \alpha, \beta \in K$ , nicht alle  $= 0$ , mit  $\xi x = \alpha a + \beta b$  und  $\xi = \alpha + \beta$ . Falls  $\xi = 0$  wäre  $a = b$ . Man darf  $\xi \neq 0$  annehmen.  $\square$