Vorlesung Lineare Algebra I

SoSe'24 hhu
K. Halupczok

§1: Mathematische Grundbegriffe

L1: Einführung

Stichworte: Definition, Aussage, Variablen, Satz/Theorem/Lemma/Proposition/Korollar, Def. Aussage, Aussageform, Verknüpfungen $\wedge \vee \neg$, Wahrheitstafeln, Klammern

---

1.1. Das Wort Definition ist aus dem Lateinischen und bedeutet "Abgrenzung". In Definitionen versuchen wir, die Bedeutung von Symbolen und Begriffen so klar wie nur möglich festzulegen. In der Mathematik werden häufig Begriffe der Umgangssprache (wie z.B. Gruppe, Ring, Körper, Abbildung, ...) umgewidmet und ihnen spezielle neue Bedeutungen gegeben, so dass eine Fachsprache entsteht. Neben dem Anspruch, die Begriffe der Fachsprache sauber zu definieren, möchte man auch Aussagen über diese soweit wie möglich beweisen, d.h. mithilfe logischen Schlussfolgerns zu verifizieren. Das bedeutet, mit der Anwendung klarer logischer Regeln zu zeigen, dass diese wahr sind.
Dabei greift man auf möglichst wenige Begriffe, Aussagen und Regeln zurück (sogenannte Axiome als Grundbausteine der Mathematik) und baut auf diesen auf. Die Axiome als solche werden dann nicht mehr hinterfragt, sondern als gegeben und wahr akzeptiert, wenn sie als klar und einleuchtend erscheinen. Diese Herangehensweise wurde im Laufe der Mathematikgeschichte immer wieder heftig diskutiert und bis heute hinterfragt, wie z.B. das sogenannte Auswahlaxiom.
Dennoch spricht in der täglichen Praxis der Mathematik nichts gegen diese Vorgehensweise: üblicherweise baut man auf dem sogenannten ZFC-Axiomensystem auf und wendet die gewöhnlichen Schlüsse der Aussagenlogik an. Wir wollen uns dem nähern und das übliche "logische Schließen", das verwendet wird, hier als erstes erarbeiten in §1.

1.2 Vom Sinn der Abstraktion:

"Deduktion": wird einem ein abstrakter Zusammenhang genannt, so kann man ihn verstehen, indem man ihn auf Beispiele zurückführt und diese studiert.
[Wenn man z.B. den Satz des Pythagoras erfährt, kann man ihn z.B. am rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten der Länge 3 und 4 überprüfen.]

"Induktion": studiert man sehr viele Beispiele, so soll eine Abstraktion dazu helfen, einen gefundenen Zusammenhang für alle machbaren Beispiele zu formulieren.
[Nachdem er viele rechtwinklige Dreiecke und seine Seitenlängen studiert hat, wird ein denkender Mensch irgendwann den Satz des Pythagoras formulieren.]

Das Zusammenspiel zwischen Deduktion und Induktion ist Wesen des wissenschaftlichen Denkens an sich. Die Mathematik erlaubt es, mit ihrer abstrakten Formelsprache ("Formalismus") hier unterstützend zu wirken: Zur Deduktion braucht man nur erlaubte Objekte einsetzen, und sie ist so gemacht, dass man immer etwas einsetzen kann. Dafür dienen Variable, das sind Platzhalter, für die dazugesagt werden muss, welche Objekte eingesetzt werden dürfen, Bsp.: Ist x eine gerade Quadratzahl, dann ist x durch 4 teilbar. Zur Induktion würde man nach vielen Beispielen einen abstrakten Zusammenhang exakt formulieren. Dieser braucht noch lange nicht richtig sein, es wird ein Beweis zur Verifizierung erforderlich sein, dazu später mehr. Natürlich ist das Studium von Beispielen nicht der einzige Weg, Zusammenhänge zu finden, sondern auch die Regeln der Aussagenlogik sollen dafür erlaubt sein.

1.3 Ziele eines abstrakten Formalismus:

- alles soll unmissverständlich sein [„Tafelebene“, „Verschiebung des Raumes“: ??]
- seine Spielregeln so klar, dass alles nachvollziehbar sein soll

(Laut Hilbert: ein abstrakter Formalismus soll widerspruchsfrei, unabhängig, vollständig, kategorisch sein...)

Starke Vereinfachungen sind dabei nötig, die beschriebenen Objekte werden so auf ihre wesentlichen zu thematisierenden Aspekte reduziert. [Ob ein rechtwinkliges Dreieck grün ist, spielt für den Satz des Pythagoras keine Rolle.]

1.4. Eine mathematische wahre Aussage bezeichnen wir als (mathematischen) Satz.
Bsp.: Satz: Gerade Quadratzahlen sind durch 4 teilbar.
Dabei wird bereits vorausgesetzt, dass die Begriffe "gerade", "Quadratzahl", "teilbar", ja sogar die Zahl "4", bekannt sind und vorher sauber definiert wurden. Varianten des "Satzes" sind folgende Abstufungen nach Wichtigkeit:

Theorem: ein besonders wichtiger Satz,
Lemma: ein Hilfssatz, welcher ein Zwischenresultat ausdrückt,
Korollar: ein Ergebnis, der ohne großem Beweisaufwand aus einem vorangehenden Satz erhältlich ist (griech. corollarium = Zugabe, Geschenk)
Proposition: ein Satz, der eher ein Hilfsergebnis ausdrückt

1.5. Def.: Eine Aussage besteht aus vollständig definierten Ausdrücken (die aus mathem. Objekten bestehen) und ist entweder wahr (w) oder falsch (f).

Von Aussagen der Umgangssprache kann der Wahrheitsgehalt nicht immer eindeutig festgestellt werden, Bsp.: Es regnet in Paris.
Wenn eine Aussage mit logischen Schlüssen als wahr erkannt wird, sprechen wir von einem Beweis.

Grundlegende Aussagenlogik

1.6. Wir möchten allgemein über Aussagen und ihre Wahrheitswerte sprechen.
Dazu nennen wir sie stellvertretend $A, B, C, \dots$ und nehmen darauf Bezug:
Ist eine Aussage A wahr, sagen wir auch kurz "A gilt", ansonsten "A gilt nicht".
Dabei sind $A, B, \dots$ gewissermaßen Variablen, in die konkrete Aussagen eingesetzt werden können, um Beispiele zu erhalten.

1.7. Bsp.: "2 ist gerade" gilt, "2 teilt 4" ist wahr, "18 ist Quadratzahl" ist falsch,
A ist eine Aussage. "A ist eine Aussage" ist eine Aussage.
(Im nachfolgenden Satz wurde für A etwas eingesetzt, nämlich die Aussage selbst, beachten Sie, dass ich zur Klarstellung Gänsefüßchen gesetzt habe.)

1.8. Manche Mathematiker nennen Aussagen mit Aussagevariablen noch genauer eine Aussageform, diese haben erst nach Einsetzen einen festgelegten Wahrheitswert.
Aber: Aussagen mit Selbstbezug sollen nicht zugelassen werden.
Bsp: "Diese Aussage ist falsch." macht keinen Sinn!

1.9. Verknüpfung von Aussagen: "und", "oder", "nicht"
in Zeichen: $A \wedge B$, $A \vee B$, $\neg A$

– per Wahrheitstafel können diese Verknüpfungen erklärt werden in Abhängigkeit der Wahrheitswerte von A und B, welche beliebige Aussagen sein können.

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$\neg A$
w	w	w	w	f
w	f	f	w	f
f	w	f	w	w
f	f	f	f	w

Negation: – hierbei ist $\neg A$ wahr, genau dann wenn A falsch ist (lies "nicht A")
Konjunktion: – hierbei ist $A \wedge B$ genau dann wahr, wenn A und B beide wahr sind, ansonsten ist "$A \wedge B$" falsch (lies "A und B"),
Disjunktion: – hierbei ist $A \vee B$ genau dann falsch, wenn A und B beide falsch sind, ansonsten ist "$A \vee B$" wahr (lies "A oder B"). Hier ist nicht "entweder A oder B" gemeint, was falsch wäre wenn A und B beide wahr wären; es ist eine (nützliche) mathematische Konvention, "oder" immer so zu verstehen wie hier.

Bemerkung: • Die Aussagen $A \vee \neg A$ und $\neg(A \wedge \neg A)$ sind immer wahr!
• Die Reihenfolge ist unerheblich: $A \wedge B$ bedeutet $B \wedge A$, $A \vee B$ bedeutet auch $B \vee A$

1.10. Aus diesen Grundverknüpfungen lassen sich alle anderen wichtigen Aussagenverknüpfungen aufbauen. Und vielerlei Ausdrücke aufschreiben, wie z.B. $(A \vee B) \vee C$, wobei es auf die Klammerung ankommt, welche die Reihenfolge der Verknüpfungen klarstellt.
So ist etwa $A \vee (B \vee C)$ (zunächst) eine andere Aussage.

Damit man nicht soviele Klammern schreiben muss und diese Formeln übersichtlicher schreiben kann, gibt es die folgenden
<u>Klammersetzungsregeln</u>:

- $\neg$ bindet stärker als $\wedge$
- $\wedge$ bindet stärker als $\vee$

1.11. Damit kann z.B. $((A \vee B) \vee (C \wedge (\neg D)))$ einfacher als $A \vee B \vee C \wedge \neg D$ geschrieben werden. Zur Verdeutlichung/Klarstellung dürfen die Klammern natürlich trotzdem geschrieben werden. Weil $(A \vee B) \vee C$ dieselben Aussagewerte hat wie $A \vee (B \vee C)$ (überprüfen Sie das mit einer Wahrheitstabelle!), darf auch $A \vee B \vee C$ dafür geschrieben werden, und <u>analog</u> geht das ebenso mit $A \wedge B \wedge C$. (Das Wort "analog" wird immer dann benutzt, wenn ein Sachverhalt genauso richtig ist nach leichter Abänderung, hier nach Ersetzen von "$\vee$" durch "$\wedge$". Dieses Wort wird häufig benutzt, es spart Wiederholungen. Aber es sollte nur eingesetzt werden, wenn wie hier unmissverständlich klar ist, was gemeint ist.)