

Vorlesung Lineare Algebra I

SoSe'24 hhu

K. Halupczok

§5: Endomorphismen

L20: Eigenwerte und Eigenvektoren

Stichworte: EWe, EVen, Spektrum, lin. Unabh. von EVen zu versch. EWe, Diagonalisierbarkeit, charakteristisches Polynom, Spur, Eigenraum, Existenz von EWe

Nach Satz 16.19 gibt es zu jeder lin. Abb. $f: V \rightarrow W$ mit $\text{rg}(f) = r$, V, W endlichdimensional, Basen $B \subseteq V$, $E \subseteq W$, so dass $[f]_{B,E} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ gilt.

Speziell gilt dies auch für Endomorphismen, wenn $V = W$ ist, aber dann müssen wir i.a. verschiedene Basen B und E wählen, um diese Darstellung zu erreichen.

Es stellt sich die Frage, welche "einfachen" Darstellungen noch möglich sind, wenn wir im Bild- und Urbildexemplar von V dieselbe Basis verwenden möchten.

Wir nennen solche einfachen Darstellungen Normalformen. Dafür treffen wir für das Folgende die

20.1. Vereinbarung: Ab jetzt verstehen wir unter einer Matrixdarstellung eines Endos stets eine solche, bei der in Bild und Urbild dieselbe Basis gewählt ist.

Verschiedene Matrixdarstellungen A_1, A_2 derselben Endo f sind dann ähnlich, d.h. es gibt eine invertierbare Matrix S mit $A_2 = S^{-1}A_1S$.

Betrachten wir die Diagonalmatrix $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \in k^{n \times n}$ (d.h. $a_{ij} = \begin{cases} \lambda_i, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$) und den zugehörigen Endo $f: k^n \rightarrow k^n, x \mapsto Ax$.

Die Diagonalelemente seien alle $\neq 0$. Hätte f eine Normalform wie im Rangdarstellungsatz 16.19 mit derselben Basis, so müsste A zu I_m ähnlich sein, d.h. $I_m = S^{-1}AS$ ($\Rightarrow A = S^{-1}I_mS = SS^{-1} = I_n$, was i.a. falsch ist).

Somit kann eine Diagonalmatrix nicht auf "einfachere" Gestalt gebracht werden.

Aber: f hat eine andere wichtige Eigenschaft: $f(e_i) = Ae_i = \lambda_i e_i$ für die Einheitsvektoren! Zu f ex. also Vektoren $v \neq 0$, die durch f in ein Vielfaches von sich übergehen (letzteres ist für $v=0$ trivial und in diesem Fall uninteressant).

20.2. Def. (EW/EV): 1.) Sei V ein K -VR, $f: V \rightarrow V$ Endo

Ein Skalar $\lambda \in K$ heißt Eigenwert (von f)

falls ein Vektor $v \in V$, $v \neq 0$, existiert mit $f(v) = \lambda v$.

Jeder solche Vektor v heißt Eigenvektor (von f) zum Eigenwert λ .

- 2.) Da für eine quadr. Matrix $A \in K^{n \times n}$ ein Endo $K^n \rightarrow K^n$, $x \mapsto Ax$ festgelegt wird, werden über diesen Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix A erklärt. (D.h. λ ist EW zum EV $v \neq 0$ der Matrix A , falls $Av = \lambda v$.)
- 3.) Die Menge aller Eigenwerte von f heißt Spektrum von f , analog Spektrum von A.

20.3. Bem.: (1) Abkürzungen: EW = Eigenwert, EV = Eigenvektor

(2) engl. Bezeichnungen: eigen value = Eigenwert, eigen vector = Eigenvektor

(3) Anschaulich: v ist ein Vektor, den f "in dieselbe Richtung" abbildet:

das Bild $f(v)$ ist das λ -fache von v .



(4) Man könnte $L(v)$ auch als Fixrichtung bezeichnen, da $L(v) = L(f(v)) = f(L(v))$.

(5) Mit $\alpha \neq 0$ ist natürlich mit v auch αv Eigenvektor zum selben Eigenwert.

(6) Ist $f: V \rightarrow W \neq V$ linear, macht $f(v) = \lambda v$ keinen Sinn, da $\lambda v \notin W$.

(7) Der Nullvektor 0 ist (per Definition) kein EV! Niemals! ($\lambda \cdot 0 = 0$ gilt für alle λ)

(8) Ein Fixpunkt von f ist ein $x \in V$ mit $f(x) = x$, d.h.

für $x \neq 0$ ein EV zum EW $\lambda = 1$.

(9) Alle $x \in \ker f$, $x \neq 0$, sind EV zum EW $\lambda = 0$, da $f(x) = 0 = 0 \cdot x$ gilt.

20.4. Kor.: Ähnliche Matrizen haben dieselben EWE, d.h. ($A, B \in K^{n \times n}$ ähnlich,

$\exists \lambda \in K \exists v \in K^n, v \neq 0 : Bv = \lambda v \Rightarrow Av = \lambda v$ für ein $w \in K^n, w \neq 0$.

Bew.: Sei $A = S^{-1}BS$ mit $S \in K^{n \times n}$ invertierbar. Aus $Bv = \lambda v$ folgt $AS^{-1}v$

$$= \underbrace{(S^{-1}BSS^{-1})}_{A}v = S^{-1}Bv = S^{-1}\lambda v = \lambda S^{-1}v, \text{ d.h. } \underline{S^{-1}v} \text{ ist EV von } A \text{ zum EW } \lambda. \quad \square$$

20.5. Bsp.: $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ hat dieselben EWE wie $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, nämlich $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 3$,

$$\text{denn } \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}_{S^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}_B \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}_S = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \text{ EWE: } S^{-1}e_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, S^{-1}e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Probe: } \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

Frage: Aber wie bekommt man S ? Durch Bestimmung der EWE, vgl. Bsp. 20.26.

Eine wichtige Eigenschaft: EVen zu verschiedenen EWe sind linear unabhängig.

20.6. Satz: Sei $K\text{-VR}$, $f: V \rightarrow V$ Endo, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ p.w.v. EWe von f mit EVen v_1, \dots, v_k .

Dann sind v_1, \dots, v_k linear unabhängig. (Analog für Matrizen)

Bew.: Vollständige Induktion nach k : $k=1$: klar da $v_1 \neq 0$ nach Def. "EV".

$\rightsquigarrow k+1$: Sei $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{k+1} v_{k+1} = 0$ mit $\alpha_1, \dots, \alpha_{k+1} \in K$. Nach Anwendung von f folgt $0 = f(0) = f(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{k+1} v_{k+1}) = \alpha_1 f(v_1) + \dots + \alpha_{k+1} f(v_{k+1})$, also $0 = \underbrace{\alpha_1 \lambda_1}_{} v_1 + \dots + \underbrace{\alpha_{k+1} \lambda_{k+1}}_{\lambda_{k+1} \neq 0} v_{k+1}$.

Andererseits gilt $0 = \lambda_1 \alpha_1 = \lambda_1 \alpha_1 v_1 + \lambda_1 \alpha_2 v_2 + \dots + \lambda_1 \alpha_{k+1} v_{k+1}$, von der vorigen folg.

Abziehen liefert $(\lambda_2 - \lambda_1) \alpha_2 v_2 + \dots + (\lambda_{k+1} - \lambda_1) \alpha_{k+1} v_{k+1} = 0$.

Nach Induktionsvoraussetzung sind v_2, \dots, v_{k+1} linear unabhängig, es folgt $(\lambda_2 - \lambda_1) \alpha_2 = \dots = (\lambda_{k+1} - \lambda_1) \alpha_{k+1} = 0$. Da die λ_i p.w.v. folgt $\alpha_2 = \dots = \alpha_{k+1} = 0$, $\underbrace{\alpha_1 v_1 = 0}_{\Rightarrow \alpha_1 = 0}$. \square

20.7. Kor.: Jeder Endo eines n -dim. K -VRs V hat $\leq n$ viele EWe.

(Analog für jede Matrix $A \in K^{n \times n}$.)

Bew.: Wegen Satz 20.6 und der Tatsache, dass in V maximal n Vektoren lin. unabh. sind. \square

20.8. Kor.: Besitzt ein Endo f eines n -dim. K -VRs V genau m verschiedene EWe $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, so bildet eine Familie (v_1, \dots, v_m) zugehöriger EVen eine Basis von V . Bezuglich einer solchen Basis hat f die Matrixdarstellung $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{pmatrix}$ als Diagonalmatrix.

20.9. Bem.: Die Identität id_V (alle $x \neq 0$ sind EVen zum EWe 1) zeigt aber, dass durchaus eine Basis aus EVen existieren kann, ohne dass n verschiedene EWe vorhanden sind.

Hat ein Endo f eine Basis aus EVen, kann dieser als Diagonalmatrix dargestellt werden:

20.10. Satz: Zu einem Endo f sei (v_1, \dots, v_m) eine Basis aus EVen von f zu EWe $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ (nicht notwendig verschieden). Dann hat f bzgl. dieser Basis die Matrixdarstellung

$$A = \underline{\text{diag}}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) := \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{pmatrix} \quad \text{mit } (a_{ij}) = \begin{cases} \lambda_i, & i=j, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bew.: Die Einträge a_{ij} von A sind die Koeffizienten der Darstellung $f(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} v_i$, wobei $f(v_j) = \lambda_j v_j$ zeigt, dass $a_{ij} = \begin{cases} \lambda_i, & i=j, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$ gilt. \square

Wir führen den folgenden Begriff ein.

20.11 Def. (diagonalisierbar): Besitzt ein Endo f eine Matrixdarstellung als (endliche) Diagonalmatrix, d.h. \exists Basis B mit $\alpha[f]_B = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ für $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$, so heißt f diagonalisierbar.

Satz 20.10 lässt sich umkehren:

20.12 Satz: Jeder diagonalisierbare Endo f von V mit $\dim V = m$ besitzt eine Familie (v_1, \dots, v_m) von Eigenvektoren, die eine Basis von V bilden.

Bew.: Da f diagonalisierbar, ex. ein Isomorphismus $g: V \rightarrow K^m$ so, dass $f' := g \circ f \circ g^{-1}$ bezüglich $E = (e_1, \dots, e_m)$ die Matrixdarstellung

$$A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{pmatrix} \text{ hat.}$$

Dann ist aber $f'(e_i) = A e_i = \lambda_i e_i$,

und mit $v_i := g^{-1}(e_i)$ ist dann $f(v_i) = (g^{-1} \circ g \circ f \circ g^{-1})(e_i) = (g^{-1} \circ f')(e_i)$
 $= g^{-1}(f'(e_i)) = g^{-1}(\lambda_i e_i) = \lambda_i g^{-1}(e_i) = \lambda_i v_i$, also sind die v_i EVen und als Bilder der Einheitsvektoren unter dem Isomorphismus g^{-1} eine Basis. \square

20.13 Zusammenfassung: • Ein Endo f von V , $\dim V = m$, ist genau dann diagonalisierbar, wenn es eine Basis aus EVen von f gibt. • Ein Endo f von V , $\dim V = m$, ist sicher dann diagonalisierbar, wenn es zu ihm m verschiedene EVen gibt.
• Keineswegs sind alle Endos in endl.-dim. V Ren diagonalisierbar, vgl. L21.

Zur (rechnerischen) Bestimmung von EW/EV

20.14 Anfangssituation: Sei V ein K -VR, $\dim V = m$, $f: V \rightarrow V$ Endo.

Sei $A := \alpha[f]_B$ und fest. Koordinatenvektor $K_B(w) \in K^m$ bzgl. Basis B .

Dann ist die Untersuchung von $f(w) = \lambda w$ gleichwertig mit der von $A \cdot w = \lambda w$

und $w = K_B(w) : \begin{matrix} V & \xrightarrow{f} & V \\ K_B \downarrow & & \downarrow K_B \\ K^m & \xrightarrow{\quad} & K^m \end{matrix}$ Es genügt also, EW/EV von quadratischen Matrizen zu berechnen!

(Die EVen sind dieselben, mit $w = K_B^{-1}(w)$ erhält man die EVen in V .)

20.15. Satz (Charakterisierung von EWen): Sei $A \in K^{n \times n}$. Dann sind äquivalent:

- (1) $\lambda \in K$ ist EW von A
- (2) es existiert ein $v \in K^n$, $v \neq 0$: $Av = \lambda v$
- (3) es existiert ein $v \in K^n$, $v \neq 0$: $(A - \lambda \cdot I_n)v = 0$, $I_n = \text{einfache Einheitsmatrix}$
- (4) das homogene LGS $(A - \lambda \cdot I_n) \cdot v = 0$ hat eine nichttriviale Lsg. (in v)
- (5) $\text{rg}(A - \lambda I_n) < n$
- (6) $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Bew.: (1) \Leftrightarrow (2) laut Def., (2) \Leftarrow (3): Umformen, (3) \Leftarrow (4): Formulierung mit LGS,
(4) \Leftarrow (5) laut Kor. 16.16 mit $b = 0$, (5) \Leftarrow (6) laut Satz 19.3.(3). \square

20.16. Bem.: v in (2)-(4) ist EV zu λ , d.h. die EVen zu λ sind die Elemente aus $\ker(A - \lambda I_n) \setminus \{0\}$.

Die Charakterisierung (6) von EWen ist rechnerisch machbar. Fasst man λ als Unbestimmte in dem Ausdruck $\det(A - \lambda I_n)$ auf, d.h. bildet $\det(A - T \cdot I_n)$, so ergibt dies ein Polynom $\in K[T]$ laut Laplace-Entwicklungsatz:
 $\det(A - T \cdot I_n) = \det((\alpha_{ij} - T \cdot \delta_{ij})_{i,j}) = \sum_{i=1}^n (\alpha_{ij} - T \cdot \delta_{ij}) \cdot \det A_{ij}$, und
sind die $\det A_{ij}$ Polynome, so auch induktiv $\det(A - T \cdot I_n)$.

Ein jeder EW ist dann Nullstelle dieses Polynoms (bedenken: \det ist für Matrizen über $K[T]$ anstelle K auch sinnvoll, so dass $\det(A - T \cdot I_n) \in K[T]$ ebenso Laplace-entwickelbar).

20.17. Def.: Das Polynom $\chi_A(T) := \det(A - T \cdot I_n)$ heißt charakteristisches Polynom von A,
Satz 20.15 zeigt:

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind genau die EWs von A.

(Intervall: $\chi_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \exists v \neq 0 : Av = \lambda v$)

20.18. Bem.: 1.) Mühelos lässt sich Satz 20.15 für einen Endomorphismus $f: V \rightarrow V$ übertragen:

$\lambda \in K$ ist EW von $f \Leftrightarrow \exists v \neq 0 : f(v) = \lambda v \Leftrightarrow \exists v \neq 0 : (f - \lambda \cdot \text{id}_V)v = 0$
 $\Leftrightarrow \ker(f - \lambda \cdot \text{id}_V) \neq \{0\} \Leftrightarrow \underbrace{\dim \ker(f - \lambda \cdot \text{id}_V)}_{= m - \dim \ker(f - \lambda \cdot \text{id}_V)} > 0 \Leftrightarrow \text{rg}(f - \lambda \cdot \text{id}_V) < n$.
laut Rangprinzip

2.) Die Rangbedingung $\text{rg}(f - \lambda \cdot \text{id}_V) < n$ ist äquivalent zu $\det(f - \lambda \cdot \text{id}_V) = 0$
nach 18.11. Ist $F = \begin{bmatrix} f \\ \vdots \\ \lambda \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$ irgendeine Matrixdarstellung von f (laut 20.1), so ist auch $F - \lambda \cdot I_m$
eine Matrixdarstellung von $f - \lambda \cdot \text{id}_V$: $\mathcal{B}[F - \lambda \cdot \text{id}_V]_{\mathcal{B}} = \mathcal{B}[f - \lambda \cdot \text{id}_V]_{\mathcal{B}} = F - \lambda \cdot I_m$
unter Verwendung von Satz 15.5. Nach Kor. 19.5 ist dann $\det(f - \lambda \cdot \text{id}_V) = \det(F - \lambda \cdot I_m)$.

Damit ist das charakteristische Polynom eines Endos wohldef., d.h. unabh. von B :

20.19. Def.: Sei $f: V \rightarrow V$ ein Endo, $\dim V = n$, $F \in K^{n \times n}$ (irgend) eine Matrixdarstellung von f . Dann heißt $X_f(T) := \det(F - T \cdot I_n)$ charakteristisches Polynom von f .

Weiter folgt:

(schreibe analog $X_A(T)$, $A \in K^{n \times n}$)

20.20. Satz: Ähnliche Matrizen haben dasselbe charakteristische Polynom.

Bew.: Eine zu A ähnliche Matrix ist auch Matrixdarstellung von $f_A: K^n \rightarrow K^n$, $x \mapsto Ax$, und hat wegen 20.18.2.) dasselbe charakteristische Polynom. Oder direkt argumentiert:
 $A = S^{-1}BS \Rightarrow \det(A - T \cdot I_n) = \det(S^{-1}BS - T \cdot I_n) = \det(S^{-1})\det(B - T \cdot I_n)\det S = \det(B - T \cdot I_n)$. \square

Das charakteristische Polynom ist auch an sich interessant:

20.21. Satz: Der Grad des charakteristischen Polynoms $X_f(T)$ eines Endos $f: V \rightarrow V$, wenn $n = \dim V$ ist, beträgt n . Sein Leitkoeffizient vor T^n ist $(-1)^n$, der Absolutkoeffizient vor T^0 ist $\det f$, und sein Koeffizient vor T^{n-1} ist $(-1)^{n-1}$ mal die Spur von f , wo $\text{Spur}(f) = \sum_{i=1}^n \alpha_{ii}$, falls $A = (\alpha_{ij})_{ij} \in \mathbb{K}^n$ ist.

20.22. Kor.: Die Spur ähnlicher Matrizen ist gleich. (Damit ist $\text{Spur}(f) := \text{Spur}(A)$ wohldefiniert.)
(Dass die Determinante ähnlicher Matrizen gleich ist, ist schon aus Satz 19.3(6) bekannt.)

Bew.: Wegen Satz 20.20. ist der Koeffizient vor T^{n-1} derselbe, jetzt Satz 20.21. \square

20.23. Beweis von Satz 20.21: Die Laplace-Entwicklung von

$$B := A - T \cdot I_n = \begin{pmatrix} \alpha_{11} - T & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - T & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha_{nn} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} - T \end{pmatrix}$$

und Zeile $i=1$ liefert

$$\sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} \beta_{1j} \det B_{1j} = \underbrace{(-1)^{1+1}}_{=+1} (\alpha_{11} - T) \cdot \det(A_{11} - T \cdot I_{n-1}) + \underbrace{\sum_{j=2}^n (-1)^{1+j} \alpha_{1j} \det B_{1j}}_{\stackrel{\text{einminus mehr}}{\stackrel{\text{Terme vom}}{\stackrel{\text{Grad } \leq n-2}{\text{Grad }}}}} + \underbrace{(-1)^{n-1} T^{n-1} + (-1)^{n-2} \text{Spur}(A) \cdot T^{n-2} + \dots}_{\text{Ind. vor.}}$$

$$= (-1)^n T^n + \alpha_{11} \cdot (-1)^{n-1} T^{n-1} + (-1)^{n-1} (\alpha_{22} + \dots + \alpha_{nn}) T^{n-1} + \dots \quad (\text{Terme kleineren Grades})$$

also folgt $\deg(A - T \cdot I_n) = n$, Leitkoeff. ist $(-1)^n$, Koeff. vor T^{n-1} ist $(-1)^{n-1} \text{Spur}(A)$.

Einsetzen von $\lambda = 0$ in das charakteristische Polynom liefert den Absolutkoeffizienten $X_f(0) = \det(f - 0 \cdot \text{id}_V) = \det f$. \square

Zunächst fassen wir die Menge der Eigenvektoren zum Eigenwert λ mit σ zusammen:

20.24. Def.: Die Menge $E_\lambda := \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\} = \ker(f - \lambda \text{id}_V)$ heißt Eigenraum von f zum Eigenwert λ .

20.25. Bem.: • Als Kern eines Endos ist E_λ ein Untervektorraum von V .

• Anschaulich: jeder Eigenraum wird mit f in sich abgebildet:

Es gilt $f(E_\lambda) \subseteq E_\lambda$ (d.h. E_λ ist f -invariant).

Der Eigenraum $E_\lambda = \ker(A - \lambda \cdot I_m)$ ist der Lösungsraum des homogenen LGS $(A - \lambda \cdot I_m) \cdot v = 0$.

Mit den Lösungen dieses LGS, etwa mit dem Gauß-Eliminationsverfahren, werden die Eigenvektoren bestimmt.

20.26. Bsp.: Sei $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ -3 & -6 & -6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Das charakteristische Polynom lautet

$$\chi_A(T) = \det(A - T \cdot I_3) = \det \begin{pmatrix} -1-T & 2 & 2 \\ 2 & 2-T & 2 \\ -3 & -6 & -6-T \end{pmatrix}.$$

Subtraktion der dritten Spalte von der zweiten zeigt $\chi_A(T) = \det \begin{pmatrix} -(1+T) & 0 & 2 \\ 2 & -T & 2 \\ -3 & T & -6-T \end{pmatrix}$ und Entwickeln nach der zweiten Spalte liefert

$$\begin{aligned} \chi_A(T) &= (-1)^{2+2} \cdot (-T) \cdot ((-1+T) \cdot (-6-T) - (-3) \cdot 2) + (-1)^{3+2} \cdot T \cdot ((-1+T) \cdot 2 - 2 \cdot 2) \\ &= -T \cdot ((1+T)(6+T) + 6) - T \cdot ((-1+T) \cdot 2 - 4) \\ &= -T \cdot (6 + T + 6T + T^2 + 6 - 2 - 2T - 4) \\ &= -T \cdot (T^2 + 5T + 6) = -T \cdot (T+2)(T+3). \end{aligned}$$

Die Nullstellen sind $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -3$, das sind hier die EWE.

Laut Kor. 20.8 bilden zugehörige EWEn eine Basis (v_1, v_2, v_3) des \mathbb{R}^3 , so dass also A diagonalisierbar ist, d.h. ähnlich zu $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Bestimmung der Eigenvektoren:

• zu $\lambda_1 = 0$: $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ -3 & -6 & -6 \end{pmatrix} x = 0$ hat die Lösungsmenge $L(v_1)$ mit $v_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

• zu $\lambda_2 = -2$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ -3 & -6 & -4 \end{pmatrix} x = 0$ hat die Lösungsmenge $L(v_2)$ mit $v_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

• zu $\lambda_3 = -3$: $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ -3 & -6 & -3 \end{pmatrix} x = 0$ hat die Lösungsmenge $L(v_3)$ mit $v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Die Eigenräume sind genau diese Lösungsmengen: $E_{\lambda_i} = L(v_i)$, $i=1,2,3$.

Bilden wir die Matrix $S := (v_1 | v_2 | v_3)$ mit den EVen als Spalten, so ist S invertierbar, weil (v_1, v_2, v_3) eine Basis ist.

$$\text{Nun ist } S^{-1} A S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3),$$

dann wegen $v_i = S e_i$, $i=1,2,3$, gilt

$$S^{-1} A S e_i = S^{-1} A v_i = S^{-1} \lambda_i v_i = \lambda_i; S^{-1} S e_i = \lambda_i e_i.$$

Wann hat ein Endo/eine quadratische Matrix garantiert mindestens einen EW?

Wenn das charakteristische Polynom mind. eine Nullstelle hat:

20.27. Satz: Jeder Endo f zu einem endl. dim. VR über \mathbb{C} (oder sonst einem algebraisch abgeschlossenen Körper) besitzt mindestens einen EW. Ebenso, wenn der Körper \mathbb{R} ist und n eine ungerade natürliche Zahl.

Bew.: Satz 8.32 (der Fundamentalsatz der Algebra, Körper mit dieser Eigenschaft heißen algebraisch abgeschlossen), bzw. Zwischenwertsatz für reelle Polynome ungeraden Grades, da $\deg \chi_f(T) = n$ nach Satz 20.21. □

20.28. Schlussbemerkung: Unter Umständen kann es nützlich sein, das charakteristische Polynom in der Form $\chi_f(T) := \det(T \cdot I_n - F)$ einzuführen, d.h. die Eigenwertglg. $A v = \lambda v$ umzuformen als $\lambda v - A v = 0 \Leftrightarrow (\lambda \text{id}_n - A)v = 0$. Dies hat mathematische Vorteile, z.B. dass $\chi_f(T)$ damit stets normiert ist und der Leitkoeff. vor T^{n-1} ist $-\text{Spur}(A)$, man erspart sich so den Faktor $(-1)^n$. Wir folgen hier der üblichen Lehrbuchdarstellung – in manchen fortgeschrittenen Vorlesungen kann eine derartige Variante der Definition aber mal vorkommen.