

Vorlesung Lineare Algebra I

SoSe'24 hhu

K. Halupczok

§5: Endomorphismen

L21: Diagonalisierbarkeit, Trigonaisierbarkeit

Stichworte: Diagonalisierbarkeitskriterien mit Eigenräumen und λ_i bzw. X_i , geometrische und algebraische Vielfachheit eines EWs, trigonalisierbar, Fahnenbasis

21.1. Die EW-theorie ist mittlerlich im Problem, eine Normalform (vgl. 20.1) aufzustellen:

Sei V ein K -VR, $\dim_K V = m$. Greg. ein Endo $f: V \rightarrow V$. Gibt es eine Basis B , bezüglich der die darstellende Matrix $\tilde{A} = [f]_B$ möglichst einfache Gestalt hat? M.a.W. gibt es zu irgendeiner darstellenden Matrix A eine dazu ähnliche Matrix \tilde{A} , so dass \tilde{A} möglichst einfache Gestalt hat?

(So, dass auf diese Weise auch eine "geometrische" Interpretation von f möglich wird.)

Haben dies in Zusammenfassung 20.13 für diagonalisierbare Endos/Matrizen geklärt: $\text{diag'bar} \Leftrightarrow \exists$ Basis aus EVen, und: \exists invers. EWs $\Rightarrow \text{diag'bar}$.

Wir möchten die Diagonalisierbarkeit noch näher mit den Eigenräumen E_λ spezifizieren: (Erinnerung: $E_\lambda := \ker(f - \lambda \cdot \text{id}_V)$ für einen EW λ .)

21.2. Satz (äquivalente Bed. für Diag'barkeit): Sei V ein K -VR, $\dim_K V = m$, $f: V \rightarrow V$ Endo.

\tilde{A} -äquivalent sind: (i) f diag'bar, (ii) in V ex. Basis aus EVen von f ,

(iii) V ist direkte Summe der Eigenräume von f , d.h. $V = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_k}$, ein $k \leq m$,

(iv) die Summe der Dimensionen der Eigenräume von f ist gleich m ,

d.h. $m = \sum_{i=1}^k \dim E_{\lambda_i}$, wo $k \leq m$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die p.W.U. EWs.

Bew.: (i) \Rightarrow (ii): hat f bzgl. B die Diag'gestalt $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A$, d.h. $Ae_i = \lambda_i e_i$, so gilt $f(v_i) = \lambda_i v_i$

für die Basisel. v_i von B (da ja $K_B(v_i) = e_i$ gilt). Also besteht B aus EVen von f .

(ii) \Rightarrow (iii): seien $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die versch. EWs von f . Nach Satz 20.6 sind Familien (v_1, \dots, v_m) , wo jedes v_i aus E_{λ_i} stammt, linear unabh. Es folgt $E_{\lambda_i} \cap (\sum_{j \neq i} E_{\lambda_j}) = 0$ für jedes $i \leq k$. Also ist die Summe der E_{λ_i} direkt, d.h. $E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_k} \subseteq V$. Für $\sum c_i v_i$ sei $v \in V$ tel., bzgl. der Basis (v_1, \dots, v_m) aus EVen ist $v = c_1 v_1 + \dots + c_m v_m$. Fassen wir in dieser Formel alle Summanden zu EVen zum gleichen EW λ_i zusammen, erhalten wir $v = \tilde{v}_1 + \dots + \tilde{v}_k$, die $\tilde{v}_i \in E_{\lambda_i}$.

(iii) \Rightarrow (iv): Klar mit 12.8, (iv) \Rightarrow (i): Seien $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_k}$ die Eigenräume von f , $\dim E_{\lambda_i} = m_i$. Wählen in jedem E_{λ_i} Basis B_i , setze $B = B_1 \cup \dots \cup B_k$, ist lin. unabh. nach Satz 20.6. Wegen $m_1 + \dots + m_k = m$ ist B sogar Basis von V , bezgl. der f Diag' gestalt hat. \square

21.3. Bem.: Satz 21.2 gilt analog für K^n statt V und Matrix $A \in K^{n \times n}$ statt f .

Wir formulieren noch ein Kriterium für Diag'barkeit mit dem charakteristischen Polynom. Dieses hat den Vorteil, dass wir dafür keine Eigenräume berechnen müssen wie in 21.2, es genügt, deren Dimension (über eine Rangüberlegung) zu bestimmen.

21.4. Satz: Sei V ein K -VR, $\dim V = m$, $f: V \rightarrow V$ Endo. Dann gilt:

f diag'bar (\Leftrightarrow) X_f hat die Form $X_f(T) = (-1)^m (T - \lambda_1)^{r_1} \cdots (T - \lambda_k)^{r_k}$ \square
 mit $r_i \in \mathbb{N}$, p.w.u. $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$,
und wenn für $i = 1, \dots, k$ gilt: $\underbrace{\dim \text{im}(f - \lambda_i \cdot \text{id}_V)}_{\text{rg}} = m - r_i$.

21.5. Bem.: 1.) hat X_f die Form \square , so sagt man: X_f zerfällt in Linearfaktoren, und r_i ist die Vielfachheit der Nullstelle λ_i .

(In diesem Fall heißt f (und jede Matrix, die f darstellt) zerfallend.)

2.) Die λ_i sind gerade die (p.w.u.) EWs von f .

3.) die zweite Forderung besagt $\dim E_{\lambda_i} = r_i$ für $i = 1, \dots, k$, da $E_{\lambda_i} = \ker(f - \lambda_i \cdot \text{id}_V)$, aufgrund des Rangsatzes

4.) entsprechendes gilt für $A \in K^{n \times n}$, ersetze $\dim \text{im}(f - \lambda_i \cdot \text{id}_V)$ durch $\text{rg}(A - \lambda_i \cdot I_n)$.

5.) hinreichend für Diag'barkeit: X_f zerfällt in lauter verschiedene Linearfaktoren (dann alle $r_i = 1$).

Im Allgemeinen werden $r_i = \dim E_{\lambda_i}$ und die Exponenten in \square nicht übereinstimmen.

Sobald sie es tun, so sagt Satz 21.4., f diag'bar (und umgekehrt). Wir wollen diese Zahlen zunächst unterscheiden und führen dafür folgende Begriffe ein.

21.6. Def.: Die geometrische Vielfachheit eines EWs λ_i ist $\dim E_{\lambda_i}$, die Dimension des Eigenraums. Die algebraische Vielfachheit eines EWs λ_i ist r_i , der Exponent von $(T - \lambda_i)$ in \square .

21.7. Kor.: Sind geometrische und algebraische Vielfachheiten gleich (für jeden EW), so ist f diag'bar (und umgekehrt). (Klar mit 21.4, 21.6)

21.8. Beweis von Satz 21.4:

\Rightarrow : f diag'bar \Rightarrow hat Abb. matrix $A_f = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_k & \\ & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ mit p.w.v. $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$.

Dann: $\det(A_f - T \cdot I_m) = (\lambda_1 - T)^{r_1} \cdots (\lambda_k - T)^{r_k} = (-1)^m (T - \lambda_1)^{r_1} \cdots (T - \lambda_k)^{r_k}$, da $r_1 + \dots + r_k = m$, und $\dim \text{im}(f - \lambda_i \cdot \text{id}_V) = \text{rg}(A_f - \lambda_i \cdot I_m) = \text{rg} \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_i & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_k - \lambda_i & \\ & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = m - r_i$.

\Leftarrow : $\boxed{\exists} \Rightarrow$ die $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sind EWe von f,

und da $\dim \text{im}(f - \lambda_i \cdot \text{id}_V) = m - r_i$ ist $\dim E_{\lambda_i} = \dim \ker(f - \lambda_i \cdot \text{id}_V) = m - \text{rg}(f - \lambda_i \cdot \text{id}_V) = r_i$. Also: $\dim E_{\lambda_1} + \dots + \dim E_{\lambda_k} = r_1 + \dots + r_k = m$. Wegen Satz 21.2(iv) ist f diag'bar. \square

21.9. Bsp.: (1) $\cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ über $K = \mathbb{R}$ nicht diag'bar: chn. Polynom ist $X_A(T) = T^2 + 1$, ohne Nst. über \mathbb{R} .

• über $K = \mathbb{C}$: $X_A(T) = (T - i)(T + i)$, hat 2 versch. EWe \Rightarrow diag'bar zu $\tilde{A} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = S^{-1}AS$

mit $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, wobei die Spalten die EWe von A sind (zum EWe $i, -i$)

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} = i \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \\ -1 \end{pmatrix} = -i \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

Fazit: f: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $x \mapsto A \cdot x$ hat keine EWe über \mathbb{R} , und ist geometrisch eine Drehung um -90° ,

denn: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ hat $X_A(T) = (T-1)^2$, die algebraische Vielfachheit des EWs 1 ist also = 2,

aber $\text{rg}(A - 1 \cdot I_m) = \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1$, d.h. die geom. Vielfachheit ist $m-1=2-1=1 \neq 2$.

Also: a.g. & geom. Vielfachheit verschieden! \Rightarrow A nicht diag'bar wegen Kor. 21.7.

Es stellt sich die Frage, wie nichtdiagonalsierbare Matrizen dennoch auf eine einfache Normalform gebracht werden können. Wir zeigen jetzt, wann immerhin eine (obere) Dreiecksmatrix ($\boxed{0}$) erreichbar ist, vgl. die Def. 14.9 solcher Matrizen. Wie diese oberen Dreiecksmatrizen noch näher spezifiziert werden können, wird dann in Linearer Algebra II als "Jordansche Normalform" vorgestellt und bewiesen.

21.10. Def.: Besitzt ein Endo f eine Matrixdarstellung als (endliche) Dreiecksmatrix, so heißt f trigonalsierbar bzw. triangularisierbar. (Entsprechend einer Matrix A, falls $f_A: K^m \rightarrow K^m$, $x \mapsto Ax$, trigonalsierbar ist.)

21.11. Bem.: Wieder können wir \mathcal{O} Matrizen A, die f darstellen, betrachten.

Unmittelbar aus der Def. ist ersichtlich:

- 21.12. Kor.: Ist $A \in K^{n \times n}$ trigonalisierbar, so gibt es eine invertierbare Matrix $S \in K^{n \times n}$, so dass $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ 0 & \lambda_2 & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_m \end{pmatrix}$ eine obere Dreiecksmatrix ergibt. Dabei sind die Diagonalelemente $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ dieser Matrix genau die EWe von A .
Bew.: Haben $X_{S^{-1}AS}(T) = (\lambda_1 - T) \cdot (\lambda_2 - T) \cdots (\lambda_m - T)$, die Nst. = EWe von $S^{-1}AS$ (bzw. von A wegen Kor. 20.4) sind genau die $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. \square

Wir können die Trigonaisierbarkeit wie folgt durch Kriterien charakterisieren:

- 21.13. Satz: Sei $A \in K^{n \times n}$. Dann sind äquivalent:

- (1) A ist (über K) triangulierbar,
- (2) X_A zerfällt über K in Linearfaktoren,
- (3) Es gibt eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_m)$ des K^n derart, dass $f_A(L(v_1, \dots, v_j)) \subseteq L(v_1, \dots, v_j)$ für alle $j \in \{1, \dots, m\}$ gilt. $[f_A : K \rightarrow K, x \mapsto Ax]$

- 21.14. Def.: Eine Basis wie in Satz 21.13 (3) heißt Fahnenbasis für A .

In diesem Fall sind die UVR $U_j := L(v_1, \dots, v_j)$ f_A -invariant, d.h. $f_A(U_j) \subseteq U_j$.

Kor.: Über C ist jede Matrix triangulierbar (da (2) gilt wegen Fundamentalsatz der Alg (Ko)).

- 21.15. Bew. von Satz 21.13:

(1) \Rightarrow (2): Ist A ähnlich zur ob. Dreiecksmatrix C mit Diagonalelementen $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, so ist $X_A(T) = X_C(T) = (T - \lambda_1) \cdots (T - \lambda_m)$, vgl. Bew. von Kor. 21.12.

(2) \Rightarrow (3): Z.z.: X_A zerfällt in Linearfaktoren $\Rightarrow A$ trigonalisierbar.

Vollständige Induktion nach m : $m=1$: $X_A(T) = \lambda_1 - T$, wähle $\mathcal{B} = (v_1)$, wo v_1 ein EV zum EW λ_1 ist. Dann ist \mathcal{B} eine Fahnenbasis.

$m-1 \rightsquigarrow m$: Da X_A in Linearfaktoren zerfällt und $\deg X_A = m \geq 2$ ist, hat A einen EW λ und einen EV v_1 zu λ . Ergänze v_1 durch Vektoren v_2, \dots, v_m zu einer Basis \mathcal{E} von V . Dann ist $e[f_A]e = \begin{pmatrix} \lambda & * & * & \dots & * \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & A_2 \end{pmatrix}$.

Nun kann die Ind. vor. nicht auf $V_2 := L(v_2, \dots, v_m)$ und $f_A|V_2$ angewendet werden, da $f_A|V_2$ i.a. kein Endomorphismus von V_2 ist.
Konstruiere stattdessen $f_2 \in \text{End}(V_2)$ wie folgt.

Ist $v \in V_2$, so ist $f_A(v) = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$ für eindeutig best. $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in K$.

Schreibe dann $f_2(v) := \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m$. Dann ist $f_2 \in \text{End}(V_2)$ und $A_2 = \varrho[f_2]_{\varrho_2}$ mit $\varrho_2 := (v_2, \dots, v_m)$. Da $X_A(T) = (T - A)^{-1} X_{A_2}(T)$ und X_A in Linearfaktoren zerfällt, zerfällt X_{A_2} in Linearfaktoren. Nach Ind. von ex. eine Basis $B' = (w_1, \dots, w_m)$ von V_2 , so dass $\varrho'[f_2]_{B'}$ eine obere Dreiecksmatrix ist. Jetzt sei $(B := (v_1, w_2, w_3, \dots, w_m))$.

- Dies ist eine Basis von V , da $V_2 = L(B')$ und ϱ eine Basis von V ist.
- B ist eine Fahnenbasis: Es ist $f_A(v_i) = \lambda_i v_i$, also $U_i := L(v_i)$ ist f_A -invariant.

Und für $i=2, \dots, m$ gilt $f_A(w_i) = r_1 v_1 + r_2 v_2 + \dots + r_i v_i$ nach Wahl von (B') ,

also $f_A(U_i) \subseteq U_i$, $U_i := L(v_i, w_2, w_3, \dots, w_m)$, unter Beachtung von $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \dots \subseteq U_m$.

(3) \Rightarrow (1): Sei $B = (v_1, \dots, v_m)$ eine Fahnenbasis für A . Dann ist $f_A(v_j) \in L(v_1, \dots, v_j)$, also ex. $r_{ij} \in K$ mit $f_A(v_j) = \sum_{i=1}^j r_{ij} v_i$, so dass $\varrho[f_A]_{B'} = (r_{ij})_{i,j}$ eine obere Dreiecksmatrix ist, wenn man noch $r_{ij} := 0$ für $i > j$ setzt. \square

21.16. Verfahren zur Bestimmung einer Fahnenbasis von $f (= f_A)$ (laut Induktion in 21.15):

1. Setze $m := 0$.

2. Seien μ_1, \dots, μ_n die p.w.v. Ew. von f .

Berechne zu jedem Eigenraum E_{μ_i} eine Basis und vereinige diese

zu einer Basis $(v_{m+1}, \dots, v_{m+r})$ von $E_{\mu_1} \oplus \dots \oplus E_{\mu_n}$.

Jeder Vektor v_i gehört zur gesuchten Fahnenbasis.

3. Ergänze diese Basis durch w_1, w_2, \dots zu einer Basis ϱ von V .

Dann ist $\varrho[f_A]_{\varrho} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ \lambda_2 & \ddots & * \\ 0 & \ddots & \lambda_r \\ \hline 0 & & C \end{pmatrix}$.

(Die $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \{\mu_1, \dots, \mu_n\}$)

seien entsprechend den Basisvektoren angeordnet.)

4. Setze $\mathcal{D} := (w_1, w_2, \dots)$ und $W := L(\mathcal{D})$.

Definiere $A_2 \in \text{End}(W)$ durch $\varrho[f_2]_{\varrho} := C$. (mit C aus Schritt 3.)

5. Setze $f := f_2$, $V := W$, $m := n+1$ und fahre bei 2. fort.

(ν kann sich in Schritt 2. bei jeder Iteration ändern.)

21.17. Bsp: 1.) Gesucht: Fahnentbasis für $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$?

Haben $\chi_A(T) = (1-T)^2 - 1 = T(T-2)$, haben EW 0 und 2.

Haben Basis $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ aus EVen, ist damit schon Fahnentbasis.

(A ist bereits diagonalisierbar, nämlich ähnlich zu $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.)

2.) Gesucht: Fahnentbasis für $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$?

Haben $\chi_A(T) = (1-T)(-3-T) + 4 = T^2 + 2T + 1 = (T+1)^2$ mit EW -1.

Wähle $v_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, ist EV zu -1. Ergänze v_1 durch $w_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu Basis \mathcal{C} .

Dann ist $\mathcal{C}[\mathbf{f}_A]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, denn $\mathbf{f}_A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dies ist obere Dreiecksmatrix, und $\mathcal{C} = (v_1, w_1)$ eine Fahnentbasis für A .

3.) Gesucht: Fahnentbasis für $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$?

Haben $\chi_A(T) = (-1-T)^2 \cdot ((-2-T)(1-T)+2) = (T+1)^2(T^2+T) = T(T+1)^3$,

also die EWs 0 und -1 mit algebraischer Vielfachheit 1 bzw. 3.

Nun ist $A + I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, also $\text{rg}(A - (-1) \cdot I_4) = 2$, d.h. $4-2=2$
ist die geometrische Vielfachheit des EWs -1.

Somit ist A nicht diagonalisierbar. Führe wieder das Verfahren durch:

$(e_1, e_3 - e_4)$ ist eine Basis des Eigenraums $E_{-1}(A)$, erkennbar an der Matrix $A - (-1) \cdot I_4 = A + I_4$. Als Basis von $E_0(A)$ berechnet man $(e_3 - 2e_4)$.

Ergänzt man die Vektoren $e_1, e_3 - e_4, e_3 - 2e_4$ durch (z.B.) e_2 zu einer Basis B des \mathbb{R}^4 , so folgt

$$\mathcal{B}[\mathbf{f}_A]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

in obiger Dreiecksform.

$$A \cdot e_2 = e_1 - e_2$$

$$= 1 \cdot e_1 + (-1) \cdot e_2$$

(e_2 ist 4. Vektor in \mathcal{B})

Somit ist $\mathcal{B} = (e_1, e_3 - e_4, e_3 - 2e_4, e_2)$ eine Fahnentbasis.