Vorlesung Lineare Algebra I

SoSe'24 hhu
K. Halupczok

§6: Euklidische und unitäre Vektorräume

L22: Räume mit Skalarprodukt

<u>Stichworte:</u> Bilinearform, hermitesch/symmetrisch, Sesquilinearform, positiv (semi-)definit, Skalarprodukt, euklidischer/unitärer Raum, Standardskalarprodukt, Norm $\|\cdot\|$, Cauchy-Schwarz, Δ-Ungleichung

---

Im Zusammenhang mit Determinanten hatten wir schon n-multilineare Abbildungen eingeführt. Für $n=1$ sind das die gewöhnlichen linearen Abbildungen. Der Fall $n=2$ führt uns zu geometrischen Begriffen wie "senkrechtstehen", "Länge eines Vektors", "Winkel", "Abstand" etc., sofern wir spezielle Bilinearformen betrachten, die Skalarprodukte heißen.

22.1. <u>Def.:</u> Sei V ein K-Vektorraum. Eine Abb. $b: V\times V\to K$ heißt <u>Bilinearform</u>, falls gilt:

(1) $$\left.\begin{aligned} b(x_1+x_2,y_1) &= b(x_1,y_1)+b(x_2,y_1)\\ b(x_1,y_1+y_2) &= b(x_1,y_1)+b(x_1,y_2)\end{aligned}\right\}\text{ für alle } x_1,x_2,y_1,y_2\in V$$

(2) $$\left.\begin{aligned} b(\alpha x,y) &= \alpha\, b(x,y)\\ b(x,\alpha y) &= \alpha\, b(x,y)\end{aligned}\right\}\text{ für alle } x,y\in V,\ \alpha\in K$$

22.2. <u>Bem.:</u> Per Definition ist eine Bilinearform $b: V\times V\to K$ eine auf V 2-multilin. Abb., vgl. <u>18.2 (D1)</u>.

22.3. Wir benötigen aber spezielle Bilinearformen. Daher def. wir folgende Eigenschaften.

<u>Def.:</u> Sei V ein K-VR, $b: V\times V\to K$ eine Abbildung.

1.) b heißt <u>symmetrisch</u>, falls $b(x,y)=b(y,x)$ für alle $x,y\in V$.

<u>Bem.:</u> Eine symmetrische Abbildung b, die linear in <u>einem</u> der Argumente ist, ist auch schon im zweiten Argument linear, und damit eine Bilinearform.

2.) Ist b Bilinearform, so heißt b <u>alternierend</u>, falls $b(x,x)=0$ für alle $x\in V$.

1. <u>Bem.:</u> Durch Ausrechnen von $0=b(x+y,x+y)=\underbrace{b(x,x)}_{=0}+b(x,y)+b(y,x)+\underbrace{b(y,y)}_{=0}$ folgt sofort $b(x,y)=-b(y,x)$, sofern $1+1\neq 0$ in K gilt, d.h. also nicht in $\mathbb{F}_2,\mathbb{F}_4,\mathbb{F}_8,\ldots$! Wird $K\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$ vorausgesetzt, wird daher häufig die Definition "$b(x,y)=-b(y,x)$" für "alternierend" gegeben.

2. <u>Bem.:</u> Diese Def. führt genau auf die Def. "alternierend" <u>(D2)</u> von <u>18.2</u>, mit $n=2$.

3. <u>Bem.:</u> Eine alternierende Bilinearform ist genau eine Determinantenfkt. im Fall $n=2$.

4. <u>Bem.:</u> Statt "alternierend" gibt es auch die Begriffe antisymmetrisch / schiefsymmetrisch.

Für uns sollen jetzt nur die Fälle $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ eine Rolle spielen, wo die Werte einer Bilinearform reell und dann > 0 oder < 0 sein können.

22.4. <u>Vereinbarung:</u> Im gesamten §6 betrachten wir nur reelle oder komplexe VRe, d.h. der Grundkörper K ist $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, d.h. $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Für eine komplexe Zahl $z = x + iy$ ist dann $\bar{z} = x - iy$ die Konjugiert Komplexe.
Alle Sätze und Definitionen – sofern nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird – die sich auf den komplexen Fall beziehen, gelten dann auch für den reellen Fall, wofür ein „Konjugiert-Strich" gegenstandslos ist (denn für $x \in \mathbb{R}$ gilt $\bar{x} = x$).

22.5. <u>Def.:</u> Sei V ein K-VR mit $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, und $b: V \times V \to K$ eine Abbildung.

1.) b heißt <u>hermitesch</u>, falls $b(x,y) = \overline{b(y,x)}$ für alle $x, y \in V$ gilt.

⌜Ist $K = \mathbb{R}$, so ist b dann symmetrisch. Dann würde man b eher "symmetrisch" nennen.⌟

<u>Bem.:</u> Eine hermitesche Abbildung b, die linear in <u>einem</u> der Argumente ist, ist i.a. <u>nicht</u> schon im zweiten Argument linear, und damit <u>keine</u> Bilinearform. Die "Konjugierte Linearität" bekommt einen anderen Namen:

2.) Sei $K = \mathbb{C}$. Eine Abbildung $b: V \times V \to \mathbb{C}$ heißt <u>Sesquilinearform</u>, falls gilt:

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & b(x_1 + x_2, y_1) = b(x_1, y_1) + b(x_2, y_1) \\ & b(x_1, y_1 + y_2) = b(x_1, y_1) + b(x_1, y_2)\end{array}\right\} \text{für alle } x_1, x_2, y_1, y_2 \in V$$

$$\left.\begin{array}{ll}(2) & b(\alpha x, y) = \alpha\, b(x,y) \\ & b(x, \alpha y) = \bar{\alpha}\, b(x,y)\end{array}\right\} \text{für alle } x, y \in V, \alpha \in \mathbb{C}$$

der konjugiert-Strich ist der Unterschied im Vgl. mit 22.1.

3.) Eine hermitesche Sesquilinearform heißt <u>hermitesche Form</u>.

22.6. <u>Lemma:</u> Eine Abbildung $b: V \times V \to \mathbb{C}$, die linear im 1. Argument und hermitesch ist, ist eine Sesquilinearform und somit eine hermitesche Form.

<u>Bew.:</u> <u>Genügt z.z.:</u> die 2. Teile der Def. in 22.5.2). Haben:

$$b(x_1, y_1 + y_2) = \overline{b(y_1 + y_2, x_1)} = \overline{b(y_1, x_1)} + \overline{b(y_2, x_1)} = b(x_1, y_1) + b(x_1, y_2) \text{ und}$$

$$b(x, \alpha y) = \overline{b(\alpha y, x)} = \overline{\alpha\, b(y,x)} = \bar{\alpha} \cdot \overline{b(y,x)} = \bar{\alpha} \cdot b(x,y). \qquad \square$$

22.7. <u>Bem.:</u>
- Hermitesche Formen benötigt man, damit $b(x,x)$ stets reell ist ($b(x,x) = \overline{b(x,x)} \Leftrightarrow b(x,x) \in \mathbb{R}$) und somit $b(x,x)$ ein Vorzeichen hat. Idealerweise sollte $b(x,x) \geq 0$ sein, damit wir $\sqrt{b(x,x)}$ bilden und es als Länge von x interpretieren können.
- Eine reelle hermitesche Form $b: V \times V \to \mathbb{R}$ ist eine symmetrische Bilinearform.

22.8. <u>Def.:</u> Sei V ein K-VR, $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. 1.) Eine hermitesche Form $b: V \times V \to K$ heißt <u>positiv definit</u> falls 1. $b(x,x) \geq 0$ für alle $x \in V$
und 2. $b(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2.) Eine positiv definite hermitesche Form heißt auch positiv definites, hermitesches <u>Skalarprodukt</u>.
3.) Eine reelle, positiv definite hermitesche Form heißt <u>reelles</u> <u>Skalarprodukt</u>.
(Ein <u>reelles Skalarprodukt</u> ist also eine <u>positiv definite</u>, <u>symmetrische Bilinearform über $\mathbb{R}$</u>.)
4.) Gilt nur 1. in 1.), so heißt b <u>positiv semidefinit</u>.
5.) Entsprechend <u>negativ (semi-) definit</u>, wenn "$\geq$" in 1.) 1. durch "$\leq$" ersetzt wird.

22.9. <u>Vereinbarung:</u> Unter "Skalarprodukt" verstehen wir im folgenden stets ein positiv definites, hermitesches Skalarprodukt. Reelle Skalarprodukte sind so immer inbegriffen.
Wir schreiben im folgenden stets $\langle x,y \rangle$ für $b(x,y)$ und $\langle \cdot,\cdot \rangle$ für b, wenn b ein Skalarprodukt ist.
Das Skalarprodukt $\langle x,y \rangle$ zweier Vektoren $x,y \in V$ ist also stets eine (komplexe) Zahl / ein Skalar, daher der Name.

22.10. <u>Eigenschaften von Skalarprodukten:</u> Sei $\langle \cdot,\cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf dem K-VR V, $K \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$. Dann gilt:

(1) $\forall x,y \in V: \langle x,y \rangle = \overline{\langle y,x \rangle}$ (hermitesch)
(2) $\forall x_1,x_2,y \in V: \langle x_1+x_2, y \rangle = \langle x_1,y \rangle + \langle x_2,y \rangle$ (Linear im 1. Argument)
(3) $\forall x,y \in V\ \forall \alpha \in K: \langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x,y \rangle$
(4) $\forall x \in V: \langle x,x \rangle \geq 0$, $\forall x \in V: \langle x,x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (pos. def.)

$\Big\}$ laut Definition

(5) $\forall x,y \in V: \langle x,0 \rangle = \langle 0,y \rangle = 0$.
(6) $\forall x_1,x_2,y \in V\ \forall \alpha,\beta \in K: \langle \alpha x_1 + \beta x_2, y \rangle = \alpha \langle x_1,y \rangle + \beta \langle x_2,y \rangle$
(7) $\forall x,y_1,y_2 \in V\ \forall \alpha,\beta \in K: \langle x, \alpha y_1 + \beta y_2 \rangle = \bar{\alpha} \langle x,y_1 \rangle + \bar{\beta} \langle x,y_2 \rangle$

<u>Bew.:</u> <u>(1)-(4):</u> ✓, <u>(5):</u> $\forall x,y,z \in V: \langle 0,y \rangle = \langle 0 \cdot z, y \rangle = 0 \cdot \langle z,y \rangle = 0$
und $\langle x,0 \rangle = \overline{\langle 0,x \rangle} = \bar{0} = 0$, <u>(6):</u> klar mit (2) und (3), haben (6) $\Leftrightarrow$ (2) $\wedge$ (3),
<u>(7):</u> $\langle x, \alpha y_1 + \beta y_2 \rangle \underset{(1)}{=} \overline{\langle \alpha y_1 + \beta y_2, x \rangle} \underset{(2)}{=} \overline{\alpha \langle y_1,x \rangle + \beta \langle y_2,x \rangle}$
$= \bar{\alpha} \overline{\langle y_1,x \rangle} + \bar{\beta} \overline{\langle y_2,x \rangle} \underset{(1)}{=} \bar{\alpha} \langle x,y_1 \rangle + \bar{\beta} \langle x,y_2 \rangle$. $\square$

22.11. **Bsp.:** Das wichtigste Bsp. ist das Standard-Skalarprodukt:

- Es sei $V := \mathbb{C}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in V$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in V$, so heißt das durch $\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$ def. Skalarprodukt (Auch: $\langle x, y \rangle = x^T \cdot \overline{y}$) das (kanonische) Skalarprodukt bzw. Standard-Skalarprodukt.

  (Bem.: anstelle $\langle x, y \rangle = x^T \cdot \overline{y}$ ist auch $\overline{x}^T \cdot y$ möglich, wenn für Sesquilinearformen die Konjugation im 1. statt 2. Argument genommen wird, was Konventionssache ist. Der Vektor $\overline{x}^T$ heißt der zu x hermitesch adjungierter Vektor.)

  Für $n=2$, $x = \binom{\xi_1}{\xi_2}$, $y = \binom{\eta_1}{\eta_2} \in \mathbb{C}^2$ ist $\langle x, y \rangle = \xi_1 \overline{\eta_1} + \xi_2 \overline{\eta_2}$.

- Für $K = \mathbb{R}$, $V := \mathbb{R}^n$, ist mit $\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i$ für $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in V$, $y = (y_1, \dots, y_n)^T \in V$, das (reelle) Standard-Skalarprodukt definiert. (Auch: $\langle x, y \rangle = x^T \cdot y$)

  Zeilenvektor, Spaltenvektor

  Für $n=2$, $x = \binom{\xi_1}{\xi_2}$, $y = \binom{\eta_1}{\eta_2} \in \mathbb{R}^2$ ist $\langle x, y \rangle = \xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2$.

- Sei $V := \mathcal{C}([\alpha, \beta])$ der $\mathbb{C}$-VR der auf dem Intervall $[\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R}$ stetigen komplexwertigen Funktionen, d.h. $\mathcal{C}([\alpha, \beta]) := \{ f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C};\ f \text{ stetig} \}$.
  Sei $p \in V$ so, dass p nur reelle positive Werte annimmt, d.h. $p : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}_{>0}$, p stetig. Dann ist für $f, g \in V$ durch

  $$\langle f, g \rangle := \int_\alpha^\beta p(t) f(t) \overline{g(t)}\, dt \qquad (*)$$

  ein Skalarprodukt definiert.

  Bew.: (4): $\langle f, f \rangle = \int_\alpha^\beta p(t) |f(t)|^2 dt > 0$ und $= 0 \Leftrightarrow \forall t \in [\alpha, \beta] : f(t) = 0$, d.h. $f = 0$.

  (6): $\langle \alpha_0 f_1 + \beta_0 f_2, g \rangle = \int_\alpha^\beta p(t) \cdot (\alpha_0 f_1(t) + \beta_0 f_2(t)) \overline{g(t)}\, dt$

  $$= \alpha_0 \int_\alpha^\beta p(t) f_1(t) \overline{g(t)}\, dt + \beta_0 \int_\alpha^\beta p(t) f_2(t) \overline{g(t)}\, dt = \alpha_0 \langle f_1, g \rangle + \beta_0 \langle f_2, g \rangle$$

  (a): $\langle f, g \rangle = \int_\alpha^\beta p(t) \underbrace{f(t) \overline{g(t)}}\, dt = \overline{\overline{\int_\alpha^\beta p(t) f(t) \overline{g(t)}\, dt}} = \overline{\int_\alpha^\beta \overline{p(t)}\, \overline{f(t)}\, g(t)\, dt}$ $\square$

  $\overset{\uparrow}{=} \overline{\int_\alpha^\beta p(t) \overline{f(t)} g(t)\, dt} = \overline{\langle g, f \rangle}$.

  $p(t)$ reell: $p(t) = \overline{p(t)}$

22.12. **Def.:** Ein reeller oder komplexer Vektorraum mit Skalarprodukt heißt euklidischer oder unitärer Raum.

Bem.: Der Begriff "euklidisch" wird nur im reellen Fall benutzt.

22.13. Def.: Gegeben sei ein Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf V. Dann definieren wir für x, y

die Norm von x: $\|x\| := \sqrt{\langle x,x\rangle}$ (denn $\langle x,x\rangle \geq 0$),

den Abstand von x und y: $d(x,y) := \|x-y\|$.

Bem.: • Die Funktion $d: V^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist dann eine Metrik, vgl. Analysis.

• die Norm $\|x\|$ eines Vektors x bezeichnet man auch als Länge von x. Gelegentlich schreibt man auch $|x|$ statt $\|x\|$ und nennt dies den Betrag von x.

• das Wort "Länge" wurde in vorangehenden Kapiteln ausschließlich synonym für "Kardinalität" benutzt. Erst jetzt sprechen wir von "Länge" eines Vektors im üblichen, anschaulichen Sinne, denn:

• Haben speziell $d(x,0) = \|x\| = d(0,x)$, d.h. die Norm von x ist der Abstand von x zu 0.

22.14. Bsp.: • Die Norm von $x \in \mathbb{C}^n$ im Falle des Standardskalarproduktes beträgt $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle} = \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2\right)^{1/2}$, wo $|\cdot|$ der Betrag auf $\mathbb{C}$ ist, d.h. $|\xi| = \sqrt{\xi\bar{\xi}}$,

also $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i \bar{\xi}_i\right)^{1/2}$.

• Die Norm von $x \in \mathbb{R}^n$ im Falle des Standardskalarproduktes beträgt $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle} = \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2\right)^{1/2}$, wo $|\cdot|$ der Betrag auf $\mathbb{R}$ ist, d.h. $|\xi| = \sqrt{\xi^2}$,

also $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2\right)^{1/2}$.

• Speziell $n=2$, $x \in \mathbb{R}^2$: $\|x\| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$, die "Länge" laut Pythagoras, vgl. L23.

Die folgende Abschätzung für ein Skalarprodukt ist mit das wichtigste Werkzeug der Linearen Algebra in Anwendungen:

kurz: "C-S"

22.15. Satz (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung / Ungleichung von Cauchy-Schwarz):
In einem unitären Raum V gilt $\forall x,y \in V$: $\underbrace{|\langle x,y\rangle|}_{\text{(komplexer) Betrag}} \leq \|x\| \cdot \|y\|$,

wobei "=" anstelle "≤" genau dann gilt, wenn x, y linear abhängig sind.

Bew.: Ist $\langle x,y\rangle = 0$, ist nichts zu zeigen. Sei also OE $\langle x,y\rangle \neq 0$, und damit $x \neq 0$, $y \neq 0$ wegen 22.10.(5). Setze $\alpha := \frac{\overline{\langle x,y\rangle}}{|\langle x,y\rangle|} \cdot \|y\|$, $\beta := \frac{|\langle x,y\rangle|}{\|y\|}$. Dann ist

$0 \leq \|\alpha x - \beta y\|^2 = \langle \alpha x - \beta y, \alpha x - \beta y\rangle = \alpha\bar{\alpha}\,\|x\|^2 - \alpha\bar{\beta}\langle x,y\rangle - \beta\bar{\alpha}\langle y,x\rangle + \beta\bar{\beta}\,\|y\|^2$

$= \|y\|^2 \cdot \|x\|^2 - \overline{\langle x,y\rangle} \cdot \langle x,y\rangle \underbrace{- \langle x,y\rangle \cdot \overline{\langle x,y\rangle} + |\langle x,y\rangle|^2}_{=0} = \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 - |\langle x,y\rangle|^2$.

Damit folgt die behauptete Unglg., und $=0$ kann nur für $\alpha x - \beta y = 0$ eintreten nach 22.16.(1). □

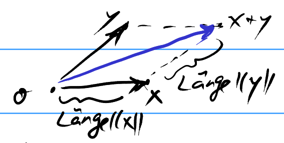
Weitere Rechenregeln für die Norm:

22.16. **Satz**: Für die Norm $\|\cdot\|$ in einem unitären Raum V gilt:

(1) $\forall x \in V: \|x\| \geq 0$, und $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(2) $\forall x \in V\ \forall \alpha \in K: \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$, wo $|\alpha|$ der Betrag von $\alpha \in K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ist,

(3) $\forall x, y \in V: \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$. (Dreiecksungleichung)



Bew.: (1) folgt direkt aus 22.10 (4), der positiven Definitheit von $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

(2): $\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x\rangle} = \sqrt{\alpha \cdot \bar{\alpha} \langle x, x\rangle} = \sqrt{|\alpha|^2 \cdot \langle x, x\rangle} = |\alpha| \cdot \|x\|$.

(3): Benutzen hier die C-S-Ungleichung 22.15 wie folgt:

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \|y\|^2$$
$$\leq \|x\|^2 + 2 \cdot |\langle x,y\rangle| + \|y\|^2$$
$$\underset{\text{C-S}}{\leq} \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 \underset{\text{bin. Formel}}{=} (\|x\| + \|y\|)^2,$$

jetzt $\sqrt{\ }$-ziehen und beachten, dass alle Terme ≥ 0 sind. $\square$

Bem.: 1. Schreiben kurz "Δ-Unglg." für "Dreiecksungleichung".

2. Eine Abb. $x \mapsto \|x\|$ eines reellen/komplexen VRs V heißt Norm von V, wenn 22.16 (1)–(3) gelten.

22.17. **Bsp.:** • Der unitäre Raum $\mathcal{C}([\alpha,\beta])$ mit dem Skalarprodukt ⊛ hat als Norm $\|f\| := \left(\int_\alpha^\beta p(t)|f(t)|^2 dt\right)^{1/2}$.

Die C-S-Ungleichung lautet hier

$$\left|\int_\alpha^\beta p(t) f(t) \overline{g(t)} dt\right| \leq \left(\int_\alpha^\beta p(t)|f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_\alpha^\beta p(t)|g(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ü Wie lautet hier die Dreiecksungleichung?

• Die C-S-Ungleichung im Falle $V = \mathbb{C}^n$ lautet

$$\left|\sum_{i=1}^n \xi_i \bar{\eta}_i\right|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n |\xi_i|^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n |\eta_i|^2\right), \qquad \text{(haben Unglg. quadriert)}$$

im Falle $V = \mathbb{R}^n$ lautet sie $\left|\sum_{i=1}^n \xi_i \eta_i\right|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n \xi_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n \eta_i^2\right)$.

22.18. **Bem.:** Für eine (selbstadjungierte) Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ wird durch $\langle x,y\rangle_A := \langle x, Ay\rangle$ eine hermitesche Form definiert. Wann ist diese aber ein S.P., d.h. pos. def.? Werden ein Kriterium in L27 kennenlernen und dort mit dem Trägheitssatz von Sylvester beweisen.