Vorlesung Lineare Algebra I

SoSe'24 hhu
K. Halupczok

§6: Euklidische und unitäre Vektorräume

L23: Geometrie im $\mathbb{R}^n$

Stichworte: senkrecht/orthogonal, elementargeom. Sätze, Winkelmessung, Kosinussatz, Drehmatrizen, Vektorprodukt, Orthonormalsystem, Orientierung eines ONS, Hesse-Normalform, Lot

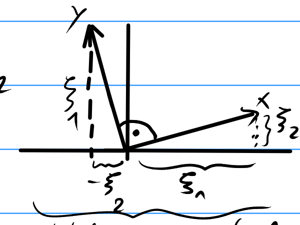
---

Der $\mathbb{R}^n$, versehen mit dem Standard-S.P. ist der Prototyp eines euklidischen Raumes. Wir beschäftigen uns hier ein wenig mit der anschaulichen Geometrie, die in euklidischen Räumen gilt. Sei im folgenden $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das reelle Standard-S.P.

23.1. Def.: Im $\mathbb{R}^n$ heißen zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ senkrecht aufeinander / orthogonal, falls $\langle x,y\rangle = 0$ ist. In Zeichen: $x \perp y$.

Bsp.: Anschaulich im $\mathbb{R}^2$: $\langle x,y\rangle = \left\langle \binom{\xi_1}{\xi_2}, \binom{\eta_1}{\eta_2} \right\rangle = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2$

Bem.: Der Nullvektor 0 ist orthogonal zu jedem Vektor.

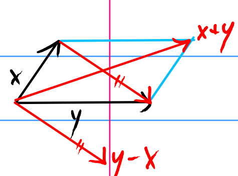


Vektoren x, y gleicher Länge: $x = \binom{\xi_1}{\xi_2}$, $y = \binom{-\xi_2}{\xi_1}$ oder $y = \binom{\xi_2}{-\xi_1}$

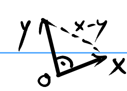
Wir werden in L24 mehr über Orthogonalität in unitären Räumen erfahren.

23.2. Elementargeometrische Sätze mit vektoriellem Beweis (im $\mathbb{R}^n$, eine Auswahl):

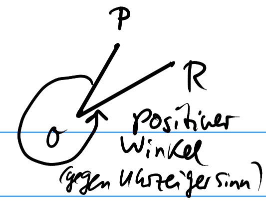
- Satz vom Rechteck: Parallelogramm ist Rechteck $\Leftrightarrow$ Diagonalen gleichlang
  $\ulcorner \|x-y\|^2 = \|x+y\|^2 \Leftrightarrow \|x\|^2 - 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \Leftrightarrow \langle x,y\rangle = 0 \lrcorner$

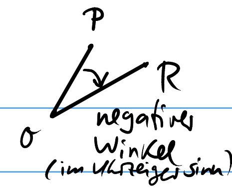


- Satz vom Rhombus: Parallelogramm hat gleichlange Seiten $\Leftrightarrow$ Diagonalen senkrecht
  $\ulcorner \langle x-y, x+y\rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2$, somit: $\|x\| = \|y\| \Leftrightarrow \langle x-y, x+y\rangle = 0 \lrcorner$
- Satz von Pythagoras: Dreieck rechtwinklig $\Leftrightarrow \|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x-y\|^2$
  $\ulcorner$ klar mit $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \lrcorner$



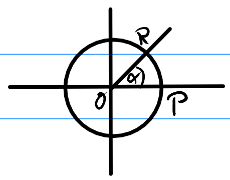
- Drehung um $\frac{\pi}{2}$ im $\mathbb{R}^2$: $\perp : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto x^\perp := \binom{-\xi_2}{\xi_1}$, falls $x = \binom{\xi_1}{\xi_2}$
- Lie-Klammer im $\mathbb{R}^2$: $[x,y] := \langle x^\perp, y\rangle = \det(x,y)$, ist bilinear & alternierend: $[x,y] = -[y,x]$
- Es gilt im $\mathbb{R}^2$: $\langle x,y\rangle^2 + [x,y]^2 = \|x\|^2 \cdot \|y\|^2$, vgl. C-S-Ungl. 22.15.





23.3. <u>Winkelmessung ("Trigonometrie")</u>
Durch die Angabe dreier Punkte P, O, R in $\mathbb{R}^n$ wird (in dieser Reihenfolge) ein (gerichteter) Winkel $\measuredangle(POR)$ am Scheitelpunkt O erklärt. Seiner Größe soll ein Zahlenwert $\in \mathbb{R}$ zugeordnet werden, den Wert des Winkels. Das Vorzeichen soll angeben, ob der Winkel rechts ($\rightsquigarrow +$) oder links ($\rightsquigarrow -$) des Streckenzuges von P nach O nach R verläuft; er verläuft dann gegen bzw. im Uhrzeigersinn.

23.4. <u>Winkel im Kreismodell</u>: Wählen OE $P = \binom{1}{0} \in \mathbb{R}^2$, $O = \binom{0}{0}$ als Scheitelpunkt fest, und R auf dem <u>Einheitskreis</u> liegend (so dass $\|R\| = 1$).



Jeder Punkt R steht dann für einen Winkel $\alpha \in \mathbb{R}$. Der Betrag des Winkels wird mit der <u>Länge des Bogens</u> von P nach R angegeben. Für $R = \binom{-1}{0}$, der sogenannte <u>gestreckte Winkel</u>, wird diese Zahl <u>π</u> genannt (d.h. die Kreiszahl π wird so definiert (in Analysis II wird gezeigt, dass diese Zahl π mit der aus Analysis I gemachten Def. von π ($\frac{\pi}{2}$ = kleinste pos. Nst. von cos) übereinstimmt). Der halbe gestreckte Winkel ist der <u>rechte Winkel</u> (d.h. RO, PO mit $P = \binom{0}{1}$ stehen senkrecht), beträgt also $\frac{\pi}{2}$. Dem Vollkreis entsprechen 2π. Mit mehrmaligem Durchlaufen des Kreises werden so beliebige Winkel $\alpha \in \mathbb{R}$ erklärt (im <u>Bogenmaß</u>; die Umrechnung in das <u>Gradmaß</u> ist linear gemäß $180° = \pi$).

23.5. <u>Def.</u>: die beiden Koordinaten von $R_\alpha = \binom{\xi_1}{\xi_2}$ im Einheitskreismodell heißen <u>Kosinus</u> und <u>Sinus</u> von α, also $\cos\alpha := \xi_1$, $\sin\alpha := \xi_2$, so dass wir $R = \binom{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ schreiben. Man erhält die <u>Winkelfunktionen</u> $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$.

23.6. <u>Bem.</u>: 1. Schließt ein Vektor $x = \binom{\xi_1}{\xi_2} \in \mathbb{R}^2$ mit der 1. Koordinatenachse den Winkel α ein, so ist $\xi_1 = \|x\| \cos\alpha$ und $\xi_2 = \|x\| \sin\alpha$, da $x = \|x\| \cdot R_\alpha$ für den Referenzpunkt R_α.

2. Haben $|e^{i\alpha}| = 1$ für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ laut Analysis I. Mit der dortigen Formel $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$ schließt man, wenn man $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ beachtet, dass die Winkelfunktionen der Analysis I genau mit den hier erklärten Winkelfunktionen übereinstimmen. Aus $e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta}$ erhält man dann die Additionstheoreme und alle daraus resultierenden Formeln, speziell das Additionstheorem für den cos: $\cos(\alpha+\beta) = \mathrm{Re}(e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta}) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$.

23.7. **Kosinussatz:** Für den Winkel $\alpha = \sphericalangle(x,y)$ zwischen $x,y \in \mathbb{R}^n$ gilt $\cos\alpha = \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\cdot\|y\|}$.

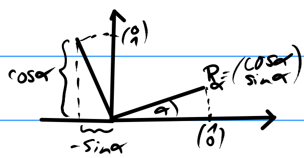
Bew.: • Fall $n=2$: Haben $\alpha = \sphericalangle(x, L\binom{1}{0}) - \sphericalangle(y, L\binom{1}{0}) =: \varphi - \psi$, nach den Additionstheoremen für den cos folgt $\cos\alpha = \cos(\varphi-\psi) = \cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi \underset{23.6.1.}{=} \frac{\xi_1}{\|x\|}\cdot\frac{\eta_1}{\|y\|} + \frac{\xi_2}{\|x\|}\frac{\eta_2}{\|y\|} = \frac{\overbrace{\langle x,y\rangle}^{\text{S.P. im } \mathbb{R}^2}}{\|x\|\cdot\|y\|}$.

• Für den Winkel α zwischen x,y gilt also

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2+\|y\|^2 - 2\langle x,y\rangle = \|x\|^2+\|y\|^2 - 2\|x\|\cdot\|y\|\cos\alpha.$$

• Beliebiges n: Die letzte Formel gilt für jedes n. Damit ist für jedes n richtig, dass $\|x\|^2+\|y\|^2 - 2\|x\|\cdot\|y\|\cos\alpha = \|x-y\|^2 = \|x\|^2+\|y\|^2 - 2\underbrace{\langle x,y\rangle}_{\text{S.P. im } \mathbb{R}^n}$, also $\cos\alpha = \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\cdot\|y\|}$ für den zwischen x,y eingeschlossenen Winkel α richtig ist. □

23.8. **Drehmatrizen:** Sei $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abb., die die Drehung um α (mit Drehzentrum 0) bewirke. Die zugehörige Matrix A_α erhalten wir mit den Bildern der Einheitsvektoren als Spalten.
Haben $f_\alpha\binom{1}{0} = \binom{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ per Def. und $f_\alpha\binom{0}{1} = \binom{-\sin\alpha}{\cos\alpha}$.



Damit wird $f_\alpha(x) = A_\alpha \cdot x$ mit der

Drehmatrix $\quad D_\alpha := \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

Bsp.: der Drehung um $\frac{\pi}{2}$, d.h. $x \mapsto x^\perp$ aus 23.2, entspricht die Drehmatrix $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2}\\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2}\end{pmatrix}$.

Die Hintereinanderausführung zweier Drehungen, $f_\alpha \circ f_\beta$, also $D_\alpha \overset{\text{Matrix-mal}}{\cdot} D_\beta$, ergibt $f_{\alpha+\beta}$,
denn: $D_\alpha D_\beta = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta\\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta\end{pmatrix}$
$= D_{\alpha+\beta}$ laut Additionstheoremen.

⌈Kein Wunder: den komplexen Zahlen $z_1 = e^{i\alpha}$, $z_2 = e^{i\beta}$ entsprechen $R_\alpha = \binom{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, $R_\beta = \binom{\cos\beta}{\sin\beta}$ im $\mathbb{R}^2$, deren Produkt $z_1\cdot z_2 = e^{i(\alpha+\beta)}$ der Winkelsumme $\alpha+\beta$. Der Multiplikation $e^{i\alpha}\cdot\underbrace{(\xi_1 + i\xi_2)}_{x}$ entspricht der Drehung von x um α, denn $x = \|x\|\cdot e^{i\varphi} \rightsquigarrow x\cdot e^{i\alpha} = \|x\|\cdot e^{i(\varphi+\alpha)}$.⌋

Bem.: D_α hat die beiden EWe $e^{i\alpha}, e^{-i\alpha}$. Ü Was sind die zugeh. EVen?

23.9. **Polarkoordinaten:** Jedes $x\in\mathbb{R}^2$ lässt sich eindeutig in der Form $x = r\cdot e^{i\alpha}$ schreiben, wo $r = \|x\|$ und $\alpha\in[0,2\pi[$; mit $\alpha\in\mathbb{R}$ ist α nur bis auf Vielfache von 2π eindeutig. Man nennt das Paar $(r,\alpha)\in\mathbb{R}_{\geq 0}\times[0,2\pi[$ dann die Polarkoordinaten von x.
⌈Für $z\in\mathbb{C}$ hat man ebenso $z = r e^{i\alpha}$, $r = |z|$, mit (r,α) als Polarkoordinaten von z.⌋
Wegen 23.8 kann die Darstellung von $z\in\mathbb{C}$ bzw. $x\in\mathbb{R}^2$ in Polarkoordinaten nützlich sein (weiteres dazu in Analysis I, II).

Das Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$

23.10. **Def.:** Zu $x = \begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ sei $x \times y := \begin{pmatrix}\xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2\\ \xi_3\eta_1 - \xi_1\eta_3\\ \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ das Vektorprodukt von x und y.

23.11. **Satz (Eigenschaften des Vektorprodukts):** Für $u,v,w \in \mathbb{R}^3$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ gelten:

(1) $(\alpha u + \beta v) \times w = \alpha(u \times w) + \beta(v \times w)$, $u \times (\alpha v + \beta w) = \alpha(u \times v) + \beta(u \times w)$,

(2) $u \times v = -v \times u$, d.h. $\times$ ist antisymmetrisch,

(3) u und v sind je orthogonal zu $u \times v$, d.h. $\langle u, u\times v\rangle = 0 = \langle v, u \times v\rangle$,

(4) für $\alpha = \sphericalangle(u,v)$ ist $\|u \times v\|^2 = \|u\|^2 \cdot \|v\|^2 - \langle u,v\rangle^2 = \|u\|^2\|v\|^2 \sin^2\alpha$.

(5) für die Einheitsvektoren e_1, e_2, e_3 gilt die Multiplikationstabelle

$\times$	e_1	e_2	e_3
e_1	0	e_3	$-e_2$
e_2	$-e_3$	0	e_1
e_3	e_2	$-e_1$	0

(6) es gilt $u \times v = 0 \iff \exists \alpha,\beta: \alpha u + \beta v = 0$ und nicht $\alpha = \beta = 0$,
d.h. u,v sind linear abhängig,

(7) es gilt $\langle u, v \times w\rangle = \det(u,v,w)$.

Bew.: (1)–(3), (5): geht mit einfachem Nachrechnen, ebenso

(4): $$\|u\times v\|^2 = (u_2v_3 - u_3v_2)^2 + (u_3v_1 - u_1v_3)^2 + (u_1v_2 - u_2v_1)^2$$
$$= (u_1v_2)^2 + (u_1v_3)^2 + (u_2v_1)^2 + (u_2v_3)^2 + (u_3v_1)^2 + (u_3v_2)^2$$
$$- 2(u_1u_2v_1v_2 + u_1u_3v_1v_3 + u_2u_3v_2v_3)$$
$$= (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)\cdot(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)^2$$
$$= \|u\|^2 \cdot \|v\|^2 - \langle u,v\rangle^2 \underset{\text{cos-Satz 23.7.}}{=} \|u\|^2\|v\|^2 - \|u\|^2\|v\|^2\cos^2\alpha$$
$$= \|u\|^2\|v\|^2\sin^2\alpha, \text{ da } 1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha.$$

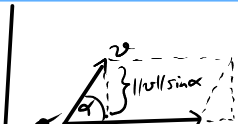
(6): Ist $v = 0$, ist $u \times v = 0$ und $0 \cdot u + 1 \cdot v = 0$ richtig. Sei also OE $v \neq 0$.

• Haben: $u \times v = 0 \overset{(4)}{\Rightarrow} \|u\|\cdot\|v\| = |\langle u,v\rangle|$. Nach dem Zusatz der CS-Ungl. 22.15 sind dann u,v lin. abh., dann ex. $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, nicht $\alpha=\beta=0$ mit $\alpha u + \beta v = 0$.

• Sei umgekehrt $\alpha u + \beta v = 0$ aber nicht $\alpha = \beta = 0$. Da $v \neq 0$ ist $\alpha \neq 0$, also $u = -\frac{\beta}{\alpha} v$. Mit $\varrho := -\frac{\beta}{\alpha}$ ist dann $u \times v = (\varrho v) \times v = \varrho(v \times v) = v \times (\varrho v) = v \times u = -u \times v$, also $u \times v = 0$.

(7): Zeige (D1), (D2), (D3) in 18.2 für $f(u,v,w) := \langle u, v \times w\rangle$. Die 3-Linearität (D1) ist klar wegen (1) und S.P.-Linearität, (D2) ist klar mit (6), (D3) auch klar. □

Bem zu (4): die r.S. ist der Flächeninhalt des Parallelogramms, das von u,v aufgespannt wird. Für $u = \begin{pmatrix}u_1\\ u_2\\ 0\end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix}v_1\\ v_2\\ 0\end{pmatrix}$ ist $\|u\times v\| = \left\|\begin{pmatrix}\det(u',v')\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\right\| = |\det(u',v')| = \left|\det\begin{pmatrix}u_1 & v_1\\ u_2 & v_2\end{pmatrix}\right|$.

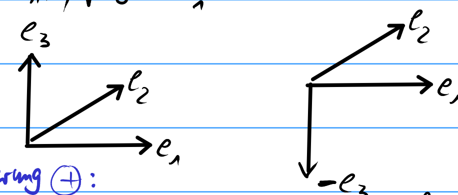


Die Standardbasis (e_1, e_2, e_3) im $\mathbb{R}^3$ bilden ein Orthogonalsystem, weil je zwei von ihnen senkrecht aufeinander stehen. Da $\|e_i\| = 1$ für $i = 1,2,3$, sind sie normiert, wir sprechen von einem Orthonormalsystem, kurz ONS (in bel. unitären Räumen def. wir dies in L24).
Im $\mathbb{R}^3$ kann man ONSe grundsätzlich in zwei Sorten aufteilen gemäß "Orientierung".

23.12. Def.: • Drei Vektoren $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^3$ bilden ein ONS, wenn $\forall i,j \in \{1,2,3\}: \langle x_i, x_j\rangle = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$.
• Ein ONS (x_1, x_2, x_3) im $\mathbb{R}^3$ heißt positiv orientiert, wenn $\det(x_1, x_2, x_3) = +1$,
und negativ orientiert, wenn $\det(x_1, x_2, x_3) = -1$.

23.13. Bem.: • Ein ONS ist lin. unabh. und daher eine Basis des $\mathbb{R}^3$
$\ulcorner \sum \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow 0 = \langle 0, x_j\rangle = \langle \sum \lambda_i x_i, x_j \rangle = \sum \lambda_i \overbrace{\langle x_i, x_j\rangle}^{=\delta_{ij}} = \lambda_j$ für jedes $j \lrcorner$
• Ein ONS hat stets positive oder negative Orientierung.
$\ulcorner$ Haben also Darstellung als LK: $x_2 \times x_3 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3$, da (x_1, x_2, x_3) Basis
$\Rightarrow 0 = \langle x_2, x_2 \times x_3\rangle = \lambda_2$, ebenso $\lambda_3 = 0$, also $x_2 \times x_3 = \lambda_1 x_1$.
Da $\|x_2 \times x_3\| = 1 = \|x_1\|$, folgt $\lambda_1 = \pm 1$ und $\det(x_1, x_2, x_3) = \langle x_1, x_2 \times x_3\rangle = \langle x_1, \lambda_1 x_1\rangle = \lambda_1 = \pm 1$. $\lrcorner$

Anschaulich:



Orientierung $\oplus$:
e_1, e_2, e_3: Daumen, Zeigefinger, Mittelfinger der rechten Hand

Orientierung $\ominus$:
$e_1, e_2, -e_3$: Daumen, Zeigefinger, Mittelfinger der linken Hand

Man kann mit einem ONS leicht rechnen, was die Koordinatendarstellung betrifft:

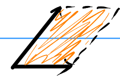
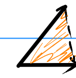
23.14. Satz: Sind $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ ein ONS, gilt $\forall y \in \mathbb{R}^3$:
(1) $y = \langle y, x_1\rangle x_1 + \langle y, x_2\rangle x_2 + \langle y, x_3\rangle x_3$,
(2) $\|y\|^2 = \langle y, x_1\rangle^2 + \langle y, x_2\rangle^2 + \langle y, x_3\rangle^2$.
(3) Es gilt $x_3 = x_1 \times x_2$ (pos.or.) oder $x_3 = -x_1 \times x_2$ (neg.or.)

Bew.: (1): $y = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3$ zeigt $\langle y, x_j\rangle = \sum \lambda_i \overbrace{\langle x_i, x_j\rangle}^{\delta_{ij}} = \lambda_j$, (2): aus (1),
(3): $x_1 \times x_2 \underset{(x_1,x_2,x_3)\text{ Basis}}{=} \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 \underset{(1)}{=} \underbrace{\langle x_1 \times x_2, x_1\rangle}_{=0} x_1 + \underbrace{\langle x_1 \times x_2, x_2\rangle}_{=0} x_2 + \lambda_3 x_3 = \lambda_3 x_3$,
mit $1 = \|x_1 \times x_2\| = |\lambda_3| \cdot \|x_3\| = |\lambda_3|$ folgt $\lambda_3 = \pm 1$. $\square$

Die Parallelogramminterpretation von 23.11.(4) lässt sich noch verallgemeinern:

23.15. **Def.:** Spat: $v_1,\dots,v_n \in \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \operatorname{spat}(v_1,\dots,v_n) := \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \mid 0 \le \lambda_i \le 1 \text{ für alle } i\}$.

Simplex: $v_1,\dots,v_n \in \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \Delta(v_1,\dots,v_n) := \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \mid 0 \le \lambda_i \text{ für alle } i \text{ und } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \le 1\}$.

Bsp. $n=2$: Spat$\left(\binom{1}{0},\binom{2}{2}\right)$:  Simplex $\Delta\left(\binom{1}{0},\binom{2}{2}\right)$:  Halbe Fläche

auch: "Parallelotop" ↳ "Pyramiden"

23.16. **Beh.:** $\operatorname{vol}(\operatorname{spat}(v_1,\dots,v_n)) = |\det(v_1,\dots,v_n)| = n! \cdot \operatorname{vol} \Delta(v_1,\dots,v_n)$. ⌈Simplex-Volumen ohne Beweis⌋

↑ da "Volumen" mit VZ (D1), (D2), (D3) erfüllt in 18.2

23.17 **Affine Räume im $\mathbb{R}^n$:** Es gibt prinzipiell zwei Arten, affine Räume (d.h. von Geraden/Ebenen...) zu beschreiben:

- Parameterdarstellung: $G_{P,a} = \{P + ta \mid t \in \mathbb{R}\} = P + \mathbb{R}a$
  ist die Gerade im $\mathbb{R}^n$ mit $P \in G_{P,a}$ "in Richtung" $a \in \mathbb{R}^n$, a heißt Richtungsvektor.

  Allg. affiner Raum: $P + U$, wo $U = L(\overbrace{a_1,\dots,a_r}^{\text{Richtungsvektoren}})$, vgl. dazu L12.22.

- Normalendarstellung (einer Hyperebene im $\mathbb{R}^n$): Mit einer Glg. der Form $\langle x,c\rangle = \alpha$, d.h.:
  $H_{c,\alpha} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x,c\rangle = \alpha\}$ für $c \in \mathbb{R}^n$, $c \neq 0$, sei $P \in H_{c,\alpha}$.
  Dies definiert eine Gerade $G_{P,c}$, einer Normalen von $H_{c,\alpha}$, die senkrecht auf $H_{c,\alpha}$ steht: Ist $H_{c,\alpha} = P + U$ mit einem UVR U, ist für $a \in U$
  $a \perp c$, da $\langle a,c\rangle = \langle a+P-P, c\rangle = \langle \underbrace{a+P}_{\in H_{c,\alpha}}, c\rangle - \langle \underbrace{P}_{\in H_{c,\alpha}}, c\rangle = \alpha - \alpha = 0$.

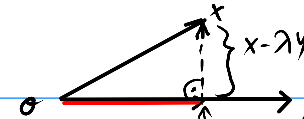
  Weiter: $\dim U = n-1$, ⌈denn $U = \ker(f)$ mit $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \langle x,c\rangle$ ist lineare Abb. mit $\operatorname{im} f = \mathbb{R}$, also $\dim U = \dim \ker f \underset{\text{Rangsatz}}{=} n - \dim \operatorname{im} f = n-1$.⌋

- Ein Spezialfall der Normalendarstellung ist die
  Hessesche Normalform: $H_{c,\alpha}$ mit $\|c\| = 1$.

23.18. Bsp. zur Normalendarstellung: Eine Ebene E im Raum $\mathbb{R}^3$ kann in der Form
$E = \{\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{pmatrix};\ \underbrace{\gamma_1\xi_1 + \gamma_2\xi_2 + \gamma_3\xi_3}_{=\langle x,c\rangle} = \alpha\}$ dargestellt werden; $c = \begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \gamma_3\end{pmatrix}$ ist darin der Normalenvektor, d.h. $c \perp E$.

Die Ebene $E = \{\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3;\ 3x - 2y - z = 2\}$ z.B. steht senkrecht auf $c = \begin{pmatrix}3\\ -2\\ -1\end{pmatrix}$.

In dieser Form nennt man die Normalendarstellung auch oft Koordinatendarstellung von E. Anderes Bsp.: $E = \{\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3;\ x = 0\}$ ist die y-z-Ebene, und $E = \{(w,x,y,z) \in \mathbb{R}^4;\ w - 3x - y + 4z = 10\}$ ist die (3-dim.) Hyperebene im $\mathbb{R}^4$, $\perp$ zu $\begin{pmatrix}1\\ -3\\ -1\\ 4\end{pmatrix}$.



$p(x,y) = $ Lot λy, haben $\lambda = \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}$

23.19. **Senkrechte Projektion / Lote fällen:**

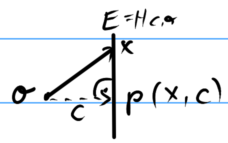
Def.: Lot von $x \in \mathbb{R}^n$ auf $y \in \mathbb{R}^n$: Vektor $p(x,y) := \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle} \cdot y$,
dieser Vektor heißt auch senkrechte Projektion von x entlang y.
Die Zahl $\frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle} \in \mathbb{R}$ heißt Komponente von x entlang y.

⌜Bestimme $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $y \perp (x - \lambda y)$: $0 = \langle y, x - \lambda y\rangle = \langle y,x\rangle - \lambda\langle y,y\rangle$
$\Leftrightarrow \lambda = \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}$.⌟

Bem.: Werden in L24.9 senkrechte Projektionen auf einen beliebigen UVR definieren.

23.20 **Rechnen mit der Hesseschen Normalform:** Sei $E = H_{c,\alpha} = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \langle x,c\rangle = \alpha\}$, $c \neq 0$.

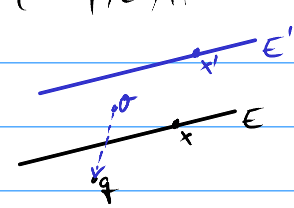
1. **Beh.:** • Ist $H_{c,\alpha} \subseteq \mathbb{R}^n$ geg., so ist der Abstand von 0 zu $H_{c,\alpha}$ gegeben als $\operatorname{dist}(0, H_{c,\alpha}) = \frac{|\alpha|}{\|c\|}$.
   • Ist außerdem $\|c\| = 1$, ist dieser Abstand also $= |\alpha|$.

Bew.: 

Der gesuchte Abstand ist die Länge von $p(x,c)$,
also $\operatorname{dist}(0, H_{c,\alpha}) = \|p(x,c)\| = \left\| \frac{\langle x,c\rangle}{\langle c,c\rangle} \cdot c \right\| = \frac{|\langle x,c\rangle|}{\|c\|} = \frac{|\alpha|}{\|c\|}$. □

2. **Beh.:** Ist $H_{c,\alpha} \subseteq \mathbb{R}^n$ geg., so ist der Abstand von (irgendeinem) $q \in \mathbb{R}^n$ zu $H_{c,\alpha}$ gegeben als
$$\operatorname{dist}(q, H_{c,\alpha}) = \frac{|\langle q,c\rangle - \alpha|}{\|c\|}.$$

Bew.: Betr. die um $-q$ verschobene Ebene $E' := \{x';\ x' + q \in E\}$, dann ist der gesuchte Abstand der von 0 zu E', für ein $x' \in E$ also $= \|p(x',c)\| = \|p(x-q,c)\|$
$$= \left\| \frac{\langle x-q,c\rangle}{\langle c,c\rangle} \cdot c \right\| = \left\| \frac{\langle x,c\rangle}{\|c\|^2} \cdot c - \frac{\langle q,c\rangle}{\|c\|^2} \cdot c \right\|$$
$$= \frac{1}{\|c\|} \cdot |\alpha - \langle q,c\rangle|. \quad \square$$



Bsp.: Abstand von $q = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ zu $H_{\binom{2}{3},5} = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2;\ 2x + 3y = 5 \right\}$ ist
$$\frac{|\langle q,c\rangle - \alpha|}{\|c\|} = \frac{|1 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 - 5|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{|2 - 6 - 5|}{\sqrt{13}} = \frac{9}{\sqrt{13}}. \quad \square$$