

Vorlesung Lineare Algebra I

SoSe'24 hhu

K. Halupczok

§6: Euklidische und unitäre Vektorräume

L24: Orthonormalbasen

Stichworte: (B)O(N)S, O(N)B, Schmidt-Othogonalisierung, orthogonales Komplement, Proximum, approximative Lösung eines unlösbaren LGS, adjungierte Matrix, Normalenglg.

Orthogonalität

Sei V ein unitärer Raum und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf V .

24.1. Def.: $x, y \in V$ heißen orthogonal, falls $\langle x, y \rangle = 0$.

Dabei ist $x=0$ und/oder $y=0$ zugelassen. Schreiben: $x \perp y$.

 S^\perp

• Ist $S \subseteq V$, so heißt $S^\perp = \{x \in V; \langle x, y \rangle = 0 \text{ für alle } y \in S\}$

das orthogonale Komplement von S in V .

• Ist $S \subseteq V$, so heißt S Orthogonalsystem von V bzgl. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (OS), falls $\forall x, y \in S, x \neq y: \langle x, y \rangle = 0$

• Ist $S \subseteq V$ ein OS, so heißt S Orthonormalsystem (ONS), falls $\forall x \in S: \langle x, x \rangle = 1$.

• Ist $S \subseteq V$ Basis von V , das Orthogonalsystem ist, so heißt S Orthogonalbasis.

• Ist $S \subseteq V$ Orthogonalbasis von V mit $\langle x, x \rangle = 1$ für alle $x \in S$, so heißt S Orthonormalbasis (ONB). "nomal" = "normiert"

24.2. Bem.: • Zwei Familien $(x_i)_{i \in I}$ und $(y_j)_{j \in I}$ in V heißen Biorthonormalsystem (BONS), wenn für alle $i, j \in I$ gilt: $\langle x_i, y_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$

• Wir nennen sie Bioorthogonalsystem (BOS), wenn $\forall i, j \in I: \langle x_i, y_j \rangle = \begin{cases} \neq 0, & i=j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$ gilt.

• Eine Familie von Vektoren in V bildet ein ONS, wenn sie mit sich selbst ein BONS bildet. (Sie bildet ein OS, wenn sie mit sich selbst ein BOS bildet.)

• im \mathbb{R}^m gilt für das Standard-S.P. $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^m x_k y_k$, dass $\langle x, y \rangle = 0$ ist genau wenn x und y senkrecht/orthogonal aufeinanderstehen [Kosinussatz 23.7.]

• Werden manche der Vektoren eines OS mit Skalen $\neq 0$ multipliziert, bleibt die so veränderte neue Vektormenge ein OS.

• Ein Vektor x mit $\langle x, x \rangle = 1$ heißt normiert.

24.3. Satz: (1) Bilden $(x_i)_{i \in I}, (y_j)_{j \in I}$ ein BOS in V , so sind je endlich viele der x_i bzw. der y_j linear unabhängig.

(2) In einem OS $(x_i)_{i \in I}$ sind je endlich viele Vektoren linear unabhängig.

Bew.: (1): Sei (x_1, \dots, x_m) und (y_1, \dots, y_n) ein solcher endlicher Teil des BOS

Wir betrachten eine LK $\theta = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$ und bilden das S.P. mit y_j zu einem festen j , so folgt $\theta = \langle \theta, y_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i, y_j \right\rangle = \sum_{i=1}^m \lambda_i \underbrace{\langle x_i, y_j \rangle}_{=\delta_{ij}} = \lambda_j$. Da j beliebig war, folgt, dass $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$ ist, dann sind x_1, \dots, x_m also linear unabhängig.

(2): Folgt aus (1), da ein ONS ein BONS mit sich selbst bildet. \square

Zur Existenz von ONSen gibt der folgende wichtige Satz eine positive Antwort in Form einer expliziten Konstruktion:

(auch: Gram-Schmidt)

24.4. Satz (Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren/Orthogonalisierung nach E. Schmidt):

Sei V ein unitärer Raum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Sei (v_1, v_2, \dots) eine (endl. oder abzählbar unendl.) lin. unabh. Familie von Vektoren in V .

Durch

$$b_1 := v_1,$$

$$b_2 := v_2 - \frac{\langle v_2, b_1 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} \cdot b_1$$

$$\rightsquigarrow \text{dann } \langle b_2, b_1 \rangle = \dots = 0$$

$$b_3 := v_3 - \frac{\langle v_3, b_1 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} \cdot b_1 - \frac{\langle v_3, b_2 \rangle}{\langle b_2, b_2 \rangle} \cdot b_2$$

$$\rightsquigarrow \text{dann } \langle b_3, b_2 \rangle = \langle b_3, b_1 \rangle = 0$$

$$b_m := v_m - \frac{\langle v_m, b_1 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} \cdot b_1 - \dots - \frac{\langle v_m, b_{m-1} \rangle}{\langle b_{m-1}, b_{m-1} \rangle} \cdot b_{m-1}$$

$\rightsquigarrow \dots$

: usw.

ist ein OS (b_1, b_2, \dots) von V gegeben, für das

$$L(b_1, \dots, b_m) = L(v_1, \dots, v_m) \quad \text{für jede endliche Teilfamilie } (v_1, \dots, v_m) \text{ von } (b_1, b_2, \dots)$$

Durch Normierung, d.h. $c_n := \frac{b_n}{\|b_n\|}$ für alle n ist dann ein ONS (c_1, c_2, \dots) von V gegeben.

Beweis klar

24.5. Bem.: Etwas kompakter geschrieben lautet die Rekursionsformel $b_1 := v_1$,

$$\text{und } b_{m+1} := v_{m+1} - \sum_{i=1}^m \frac{\langle v_{m+1}, b_i \rangle}{\langle b_i, b_i \rangle} \cdot b_i \quad \text{für } m \geq 1.$$

• Die Rekursion lässt sich gleich für die Familie (c_1, c_2, \dots) aufschreiben als

$$c_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}, \quad b_{m+1} := v_{m+1} - \sum_{i=1}^m \langle v_{m+1}, c_i \rangle c_i, \quad c_{m+1} := \frac{b_{m+1}}{\|b_{m+1}\|} \quad (\text{weil } \frac{1}{\|b_i, b_i\|} = \frac{1}{\|c_i, c_i\|}).$$

Bew.: haben z.T.: (1) $\forall m: b_m \neq 0$, (2) $\forall m, m < m: \langle b_m, b_m \rangle = 0$,
 (3) $\forall m: L(b_1, \dots, b_m) = L(v_1, \dots, v_m)$. Vollst. Ind. nahm: Alle diese Beh. gelten für $m=1$ ✓.

Ind. Schritt $m \rightarrow m+1$: zu (1): Wegen Ind. vor. ist $L(b_1, \dots, b_m) = L(v_1, \dots, v_m)$.

Daraus folgt $\sum_{i=1}^m \frac{\langle v_{m+1}, b_i \rangle}{\langle b_i, b_i \rangle} \cdot b_i \in L(b_1, \dots, b_m) = L(v_1, \dots, v_m)$. Da $(v_1, \dots, v_m, v_{m+1})$

linear unabh., ist somit $b_{m+1} \neq 0$. zu (2): Sei $m \leq m < m+1$. Dann ist

$$\langle b_{m+1}, b_m \rangle = \langle v_{m+1}, b_m \rangle - \sum_{i=1}^m \frac{\langle v_{m+1}, b_i \rangle}{\langle b_i, b_i \rangle} \cdot \underbrace{\langle b_i, b_m \rangle}_{=0 \text{ f\"ur } i \neq m}$$

$$= \langle v_{m+1}, b_m \rangle - \frac{\langle v_{m+1}, b_m \rangle}{\langle b_m, b_m \rangle} \cdot \langle b_m, b_m \rangle$$

$$= \langle v_{m+1}, b_m \rangle - \langle v_{m+1}, b_m \rangle = 0.$$

zu (3): Wegen $L(b_1, \dots, b_m) = L(v_1, \dots, v_m)$ laut Ind. vor. folgt

$$b_{m+1} \in L(b_1, \dots, b_m, v_{m+1}) = L(v_1, \dots, v_m, v_{m+1}), \text{ also}$$

$L(b_1, \dots, b_m, b_{m+1}) \subseteq L(v_1, \dots, v_{m+1})$. Da die (b_1, \dots, b_{m+1}) als OS lin. unabh. laut 24.3(2)
 folgt die Gleichheit. \square

24.6. Bem.: Das Schmidt'sche Orthogonalisierungsverfahren macht aus einer Basis (v_1, \dots, v_m) eines n -dim. unitären Raums V eine ONB (c_1, \dots, c_n) .

- Man kann damit auch jedes (abzählbare) Orthogonalsystem zu einer ONB ergänzen.
- Wenden wir den Satz 24.4 gleich an:

24.7. Satz: Sei V unitärer Raum mit SP $\langle \cdot, \cdot \rangle$, sei $S \subseteq V$ und U ein UVR von V . Dann gilt:

(1) Ist $\dim V < \infty$, so hat V bzgl. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine Orthogonalbasis.

(2) S^\perp ist UVR von V .

(3) Ist $\dim V < \infty$, so gilt $V = U \oplus U^\perp$, d.h. U und U^\perp sind komplementär.

Bew.: (1): Man wähle irgendeine Basis von V und orthogonalisiere.

(2): $0 \in S^\perp$, mit $x, y \in S^\perp$, $\alpha, \beta \in K$, ist auch $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \overline{\langle x, z \rangle} + \beta \overline{\langle y, z \rangle} = 0$
 für alle $z \in S$, also $\alpha x + \beta y \in S^\perp$.

(3): Sei (c_1, \dots, c_m) ONB von U , ergänze zu ONB $(c_1, \dots, c_m, c_{m+1}, \dots, c_n)$ von V .

Dann setze $U_0 := L(c_{m+1}, \dots, c_n)$, also U und U_0 komplementär, d.h. $U \oplus U_0 = V$.

Weiter ist $\forall x \in U \forall y \in U_0: \langle x, y \rangle = 0$ aufgrund der Konstruktion, also $U_0 = U^\perp$. \square

Mit einer ONB (c_1, \dots, c_m) lässt sich besonders bequem rechnen:

24.8 Satz: Sei V ein unitärer Raum mit S.P. $\langle \cdot, \cdot \rangle$, (c_1, \dots, c_m) eine ONB von V .

Dann: (1) Ist $v = \sum_{i=1}^m \lambda_i c_i$, $w = \sum_{i=1}^m \mu_i c_i$, so ist $\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^m \lambda_i \bar{\mu}_i$.

(2) Ist $v = \sum_{i=1}^m \lambda_i c_i$, so ist $\|v\| = \left(\sum_{i=1}^m |\lambda_i|^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^m |\lambda_i|^2 \right)^{1/2}$.

(3) Für jedes $v \in V$ ist $v = \sum_{i=1}^m \langle v, c_i \rangle c_i$ und $\|v\| = \left(\sum_{i=1}^m |\langle v, c_i \rangle|^2 \right)^{1/2}$.

Bew.:

$$\text{Zu (1): Haben } \langle v, w \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^m \lambda_i c_i, \sum_{j=1}^m \mu_j c_j \right\rangle = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \lambda_i \bar{\mu}_j \underbrace{\langle c_i, c_j \rangle}_{=\delta_{ij}} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \bar{\mu}_i.$$

$$\text{Zu (2): nimmt } w = v \text{ in (1), zu (3): Sei } w := v - \sum_{i=1}^m \langle v, c_i \rangle c_i. \text{ Dann ist}$$

$$\text{Für jedes } j: \quad \langle w, c_j \rangle = \langle v, c_j \rangle - \sum_{i=1}^m \langle v, c_i \rangle \underbrace{\langle c_i, c_j \rangle}_{=\delta_{ij}} = \langle v, c_j \rangle - \langle v, c_j \rangle = 0.$$

Die c_j bilden eine Basis von V .

Damit hat jedes $z \in V$ die Form $z = \sum_{j=1}^m \lambda_j c_j$. Damit folgt dann

$$\langle w, z \rangle = \langle w, \sum_{j=1}^m \lambda_j c_j \rangle = \sum_{j=1}^m \lambda_j \underbrace{\langle w, c_j \rangle}_{=0} = 0. \text{ Da dies für jeden Vektor } z \in V \text{ gilt, gilt dies auch für } z = w, \text{ so dass } \langle w, w \rangle = 0, \text{ also } w = 0 \text{ folgt,}$$

da $\langle \cdot, \cdot \rangle$ positiv definit ist. Der Zusatz zu $\|w\|$ folgt jetzt aus (2). \square

Eine wichtige Anwendung, die approximative Lösung von LGSen, möchten wir noch vorstellen.

24.9 Satz und Def. (Proximum): Sei V ein unitärer Raum mit S.P. $\langle \cdot, \cdot \rangle$, U UVR von V , $\dim U = m$, $y \in V$. Dann ex. genau ein $y_0 \in U$, so dass $y - y_0 \in U^\perp$.

Für y_0 gilt $\|y - y_0\| \leq \|y - x\|$ für jedes $x \in U$, $x \neq y_0$.

Man nennt y_0 das Proximum zu y in U .

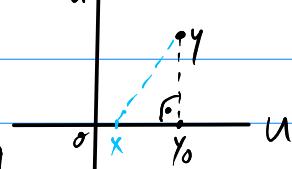
(Auch: das auf U gefällte Lot von y .)

Bem.: Haben diese Konstruktion eines Lotes (falls $U = L(x)$) bereits in 23.19

für geometrische Anwendungen benutzt.

Bew.: Ist $y \in U$, so setze $y_0 := y$, dann ist $y - y_0 = 0$, und alle anderen Beh. sind klar.

Sei also $0 \neq y \notin U$. Wähle irgendeine Basis (v_1, \dots, v_m) von U , womit (v_1, \dots, v_m, y) lin. unabh. sind. Orthogonalisiere dieses System nach Schmidt, Satz 24.4.



Wir erhalten so ein ONS (c_1, \dots, c_{m+n}) mit $L(c_1, \dots, c_m) = L(v_1, \dots, v_m) = U$,

$y \in L(c_1, \dots, c_{m+n})$. Dann hat y eine Darstellung $y = \sum_{i=1}^{m+n} \lambda_i c_i$.

Wir setzen $y_0 := \sum_{i=1}^m \lambda_i c_i$ und zeigen dafür die Beh.

• Nach Konstruktion ist $y_0 \in L(c_1, \dots, c_m) = U$. Ferner ist $y - y_0 = \lambda_{m+1} c_{m+1} \in U^\perp$, da ja c_{m+1} zu allen Elementen einer Basis von U orthogonal ist.

• Ist schließlich y' ein weiterer solcher Vektor, so ist $y'_0 - y_0 \in U$, da beide $\in U$. Ferner ist $y'_0 - y_0 = (y - y_0) - (y - y'_0) \in U^\perp$, da beide Differenzen $\in U^\perp$. Damit ist $y'_0 - y_0 \in U \cap U^\perp$, und da die Räume komplementär sind nach 24.7(3), ist $y'_0 - y_0 = 0$.

• Schließlich gilt die Proximum-Eigenschaft: Für jedes $x \in U$ ist

$$\begin{aligned}\|y - x\|^2 &= \|(y - y_0) - (x - y_0)\|^2 = \langle (y - y_0) - (x - y_0), (y - y_0) - (x - y_0) \rangle \\ &= \|y - y_0\|^2 + \|x - y_0\|^2 - \langle y - y_0, x - y_0 \rangle - \langle x - y_0, y - y_0 \rangle.\end{aligned}$$

Bei den letzten beiden S.P.-Termen ist jeweils ein Argument in U^\perp , das andere in U , somit sind diese $= 0$. Also ist

$$\|y - x\|^2 = \|y - y_0\|^2 + \underbrace{\|x - y_0\|^2}_{\geq 0} \geq \|y - y_0\|^2, \text{ wobei } " \geq " \text{ genan für } x = y_0 \text{ eintritt.}$$

Obwohl wir die

Konstruktion von y_0 von irgendeiner Basis von U abhängig gemacht haben, ist y_0 also das Proximum, dadurch eindeutig bestimmt und somit unabhängig von der gewählten Basis von U . \square

Mit diesem Satz können wir Probleme der "Ansgleichsrechnung" behandeln:

24.10. Problem: Approximative Lösung eines LGS

Gegeben sei das LGS $AX = b$ mit $A \in K^{m \times m}$. Weiter sei:

(1) $b \notin im A$, d.h. das LGS ist nicht lösbar,

(2) $n < m$ und $rg A = m$, d.h. die Spalten (a_1, \dots, a_m) von A sind zwar linear unabhängig, bilden aber keine Basis des K^m .

Gesucht: ein $x_0 \in K^m$, so dass $\|Ax_0 - b\|$ minimal ist.

Lösung: Verwende Satz 24.9 mit $V := K^m$, $U := L(a_1, \dots, a_m)$, $y := b \notin U$ und konstruiere das eindeutig bestimmte Proximum b_0 zu b in U .

Dieses b_0 tut's: Wegen $U = \text{im } A$ ist dann $b_0 \in \text{im } A$, d.h. $Ax = b_0$ ist lösbar, und da A maximalen Rang hat, sogar eindeutig lösbar.

$\lceil Ax = b_0 = Ax' \Rightarrow A(x - x') = 0 \Rightarrow x - x' = 0, \text{ da } \ker A = 0 \text{ wegen } n = \underbrace{\text{rg } A}_{\text{dim } \ker A} + \dim \ker A = \underbrace{\dim \ker A = 0}_{\text{rg } A = n} \rceil$

Die Lösung sei x_0 . Dann ist $\|Ax_0 - b\| = \|b_0 - b\| < \|x - b\|$

für alle $x \in U = \text{im } A$, $x \neq b_0$, d.h. $\|Ax_0 - b\|$ ist minimal (und $Ax_0 - b \perp U$).

Zum praktischen Rechnen kann man wie folgt mit der adjungierten Matrix vorgehen.

24.11. Def.: Sei $A \in K^{m \times m}$ eine Matrix mit El. aus $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Dann heißt $A^* \in K^{m \times m}$, $A^* := \overline{A}^T$ die adjungierte Matrix.

Man erhält sie, indem man A transponiert und (nur im Falle $K = \mathbb{C}$) alle Elemente konjugiert komplex nimmt.

24.12. Satz (Lösung von 24.10): Man bilde das LGS $A^* A x = A^* b$, die sogenannte Normalengleichung. Dafür gilt:

(1) Es hat für jedes $b \in \mathbb{C}^m$ eine eindeutig bestimmte Lösung x_0 .

Für dieses zu b gehörige x_0 ist $\|Ax_0 - b\|$ minimal.

(2) Falls $\text{rg}(A) = m \leq m$ ist, ist $A^* A \in K^{m \times m}$ eine invertierbare Matrix.

Bew.: Seien $a_j^* = (\alpha_{j1}^*, \dots, \alpha_{jm}^*)$, $j = 1, \dots, m$ die Zeilen von A^* ,

und seien $a_j = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \vdots \\ \alpha_{mj} \end{pmatrix}$, $j = 1, \dots, m$ die Spalten von A , d.h. für alle $j = 1, \dots, m$,
 $i = 1, \dots, m$ gilt $\alpha_{ji}^* = \overline{\alpha_{ij}}$.

Sei nun $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^m$. Wir bilden das Matrix-Produkt $a_j^* \cdot v$ (Zeile \times Spalte).

Dann haben wir $a_j^* \cdot v = \sum_{i=1}^m \alpha_{ji}^* v_i = \sum_{i=1}^m \overline{\alpha_{ij}} v_i = \sum_{i=1}^m v_i \overline{\alpha_{ij}} = \langle v, a_j \rangle$,
 das ist genau das Standard-S.P. im \mathbb{C}^m .

Somit folgt $A^* v = \begin{pmatrix} \langle v, a_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle v, a_m \rangle \end{pmatrix}$ für jedes $v \in \mathbb{C}^m$.

Also gilt: $v \perp \text{im } A \Leftrightarrow A^* v = 0$. \otimes

Zu (1): hatten in 24.10 gesehen: Haben genau eine Lösung x_0 , für die $Ax_0 - b \perp \text{im } A$ gilt.

Mit $b = Ax_0 - (Ax_0 - b)$ folgt $A^* b = A^* Ax_0 - A^*(Ax_0 - b) = A^* Ax_0$, da
 $Ax_0 - b \perp \text{im } A$ (mit \otimes). Somit erfüllt x_0 die Normalengl., die ist somit lösbar.

- Ist x irgendeine Lösung von $A^*Ax = A^*b$, so ist $0 = A^*Ax - A^*b = A^*(Ax - b)$, somit $Ax - b \perp \text{im } A$. Damit ist Ax das Maximum zu b , eindeutig bestimmt, also $x = x_0$.
- Zu (2): $A^*A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ist quadratisch. Da $A^*Ax = A^*b$ eindeutig lösbar, ist A^*A invertierbar. \square

24.13. Bsp. für das Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren: Im \mathbb{R}^4 mit Standard-S.P.

$$\text{sei } v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 := \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 := \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\bullet \text{ Dann: } b_1 := v_1, \|b_1\| = \sqrt{4} = 2, \text{ also } c_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} b_1.$$

$$\bullet \text{ Dann: } b_2 := v_2 - \sum_{i=1}^1 \langle v_2, c_i \rangle c_i = v_2 - \langle v_2, c_1 \rangle c_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 4 \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\text{also } c_2 = \frac{1}{\|b_2\|} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad b_{m+1} := v_{m+1} - \sum_{i=1}^m \langle v_{m+1}, c_i \rangle c_i,$$

$$\bullet \text{ Dann: } b_3 := v_3 - \sum_{i=1}^2 \langle v_3, c_i \rangle c_i = v_3 - \langle v_3, c_1 \rangle c_1 - \langle v_3, c_2 \rangle c_2$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - 6 \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ also } c_3 = \frac{1}{\|b_3\|} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\bullet \text{ Dann: } b_4 := v_4 - \sum_{i=1}^3 \langle v_4, c_i \rangle c_i = v_4 - \langle v_4, c_1 \rangle c_1 - \langle v_4, c_2 \rangle c_2 - \langle v_4, c_3 \rangle c_3$$

$$= \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ also } c_4 = \frac{1}{\|b_4\|} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Unsere ONB ist dann (c_1, c_2, c_3, c_4) . Und ja: $L(c_1) = L(v_1), L(c_1, c_2) = L(v_1, v_2)$,

$$L(c_1, c_2, c_3) = L(v_1, v_2, v_3), L(c_1, \dots, c_4) = \mathbb{R}^4.$$

24.14. Bsp. zur approximativen Lsg. eines LGS: $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 3.1 \\ 0.9 \\ 0.9 \\ -0.9 \end{pmatrix} \quad (\text{der Vektor } b \text{ könnte etwa durch Messungen entstanden sein und Messfehler enthalten}).$$

Mit Gram-Schmidt-Elimination überzeugt man sich, dass $Ax = b$ keine Lösung hat.

$$\text{Stattdessen betr. } A^*Ax = A^*b, \text{ haben } A^*A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \\ A^*b = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}. \text{ Somit ist } x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ Lsg. von } A^*Ax = A^*b.$$

$$(\text{Unsere Messfehler ergeben sich aus } \|Ax_0 - b\| = \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3.1 \\ 0.9 \\ 0.9 \\ -0.9 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ -0.1 \end{pmatrix} \right\| = 0.2.)$$