

Vorlesung Lineare Algebra I

SoSe'24 hhu
K. Halupczok

§1: Mathematische Grundbegriffe

L2: Logikregeln und Quantoren

Stichworte: Implikation \Rightarrow , Äquivalenz \Leftrightarrow , Logikregeln, direkter und indirekter Beweis, Prädikat, Quantoren $\forall \exists$, Verneinung/Umgang mit Quantoren

2.1. Die Implikation/Schlussfolgerung/Folgerung zweier Aussagen A und B ist die Aussage $\neg A \vee B$ und wird bezeichnet mit dem Symbol $A \Rightarrow B$, sprich "aus A folgt B", "A impliziert B", "wenn A gilt, dann gilt B", "A ist hinreichend für B", "B ist notwendig für A", "damit B gilt, ist hinreichend, dass A gilt", "wenn A gilt, muss B notwendig auch gelten",...

und hat die Wahrheitswerte laut Tabelle:

A	B	$A \Rightarrow B$ bzw. $\neg A \vee B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Laut Bedeutung von $\neg A \vee B$ gilt:

Ist A wahr, also $\neg A$ falsch, dann muss B stimmen, damit die Aussage insgesamt stimmt.

Damit wurde "wenn A wahr ist, dann gilt B"

ausgesagt, also eine Folgerung ausgedrückt. Ist A falsch, ist $\neg A \vee B$ wahr, egal, was B ist: "ex falso quodlibet" = "aus Falschem folgt Beliebiges".

Wir wollen "ex falso quodlibet" so zulassen; wenn wir es anders machen wollten, also z.B. "A \Rightarrow B" für falsch erklären, falls A falsch und B wahr/falsch ist hätte man andere Aussagen erklärt und

nichts Neues, vgl. diese Tabelle:

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$
w	w	w	f
w	f	f	w
f	w	f	w
f	f	f	w

alle Mögl. für andere Setzung
 $(A \wedge B) \vee (\neg(A \wedge B))$

Aber auch sonst ist "ex falso quodlibet" ein nützliches Prinzip: Soll " \Rightarrow " Bestandteil von Formeln werden, ist es dann mit unserem Einsetzprinzip

kompatibel: Die Formel " $\forall x \in \mathbb{R} : x > 3 \Rightarrow x^2 > 9$ " ist richtig, egal welche

reelle Zahl für x eingesetzt wird, etwa

$x = 5 : \underbrace{5 > 3}_w \Rightarrow \underbrace{5^2 > 9}_w$,
 $x = 2 : \underbrace{2 > 3}_f \Rightarrow \underbrace{2^2 > 9}_f$,
 $x = -4 : \underbrace{-4 > 3}_f \Rightarrow \underbrace{(-4)^2 > 9}_w$

2.2. Die Äquivalenz zweier Aussagen ist die Aussage $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$, d.h. sie ist wahr genau dann, wenn A und B dieselben Wahrheitswerte besitzen. Wir schreiben $A \Leftrightarrow B$ für diese Aussage und lesen dafür "A ist genau dann wahr, wenn B gilt", "A gilt genau dann, wenn B gilt", "A gdw. B", "A ist dann und nur dann wahr, wenn B wahr ist", "A ist äquivalent zu B", "A ist notwendig und hinreichend für B", ...

Anhand der Wahrheitstafel ist erkennbar, dass $A \Leftrightarrow B$ dieselben Wahrheitswerte wie $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ hat; wir werden dies gleich noch auf anderem Wege sehen.

A	B	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

2.3. Noch ein Paar Begriffe in diesem Zusammenhang: in einer Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$ heißt $A \Rightarrow B$ die Hinrichtung, und $B \Rightarrow A$, was auch als $A \Leftarrow B$ geschrieben werden kann, die Rückrichtung. Wenn eine Implikation $A \Rightarrow B$ vorliegt, wie z.B. $x > 2 \Rightarrow x^2 > 4$, muss noch lange nicht die Rückrichtung gelten. Oft wird dies gefragt, da Äquivalenzen eine genauere Aussage ermöglichen, wie z.B. $(x > 2 \vee x < -2) \Leftrightarrow x^2 > 4$. Zum Sparen von Klammern gibt es für \Rightarrow, \Leftarrow folgende Klammerungsregeln:
 \vee bindet stärker als \Rightarrow bzw. \Leftarrow ,
 \Rightarrow bzw. \Leftarrow bindet stärker als \Leftrightarrow .
 Weiter lassen Äquivalenzen die Formulierung zu, dass zwei Formeln in Aussagenvariablen dieselben Wahrheitswerte haben, z.B. in $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$.

Dies nutzen wir jetzt, um wichtige Logikregeln zu formulieren und auch zu beweisen.

2.4. Satz: Es gelten die folgenden Logikregeln für beliebige Aussagen A, B, C:

- (1) $A \Leftrightarrow \neg(\neg A)$
- (2) $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$
- (3) $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$
- (4) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
- (5) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
- (6) $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- (7) $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

} Distributivgesetze

Beweis: Zu (1): Ist A wahr, dann ist $\neg A$ falsch, also $\neg(\neg A)$ wieder wahr.
Ist A falsch, dann ist $\neg A$ wahr, also $\neg(\neg A)$ wieder falsch.

Also haben A und $\neg(\neg A)$ dieselben Wahrheitswerte, egal was A ist.

Zu (2) & (3): Sind ebenso klar, auch anhand der Wahrheitstabellen.

Zu (4): Sind A, B beide wahr, ist $\neg(A \wedge B)$ falsch und ebenso $\neg A \vee \neg B$.

Sind A, B beide falsch, ist $\neg(A \wedge B)$ wahr und ebenso $\neg A \vee \neg B$.

Haben A, B verschiedene Wahrheitswerte, ist $\neg(A \wedge B)$ wahr und ebenso $\neg A \vee \neg B$.

In jedem Fall haben $\neg(A \wedge B)$ und $\neg A \vee \neg B$ dieselben Wahrheitswerte, egal was A, B ist.

Zu (5): Haben $\neg(A \vee B) \stackrel{(\text{ii})}{\Leftrightarrow} \neg(\neg A) \vee \neg(\neg B) \stackrel{(\text{iv})}{\Leftrightarrow} \neg(\neg(\neg A \wedge \neg B)) \stackrel{(\text{ii})}{\Leftrightarrow} \neg A \wedge \neg B$.

Zu (6): Checken der Wahrheitswerte fällt am leichtesten:

A	B	C	$B \vee C$	$A \wedge (B \vee C)$	$A \wedge B$	$A \wedge C$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	w	w	f	w
w	f	w	w	w	f	w	w
w	f	f	f	f	f	f	f
f	w	w	w	f	f	w	f
f	w	f	w	f	f	f	f
f	f	w	w	f	f	w	f
f	f	f	f	f	f	f	f

Zu (7): $A \vee (B \wedge C) \stackrel{(\text{ii})}{\Leftrightarrow} \neg(\neg(A \vee (B \wedge C))) \stackrel{(\text{v})}{\Leftrightarrow} \neg(\neg A \wedge \neg(B \wedge C)) \stackrel{(\text{iv})}{\Leftrightarrow} \neg(\neg A \wedge (\neg B \vee \neg C))$
 $\stackrel{(\text{vi})}{\Leftrightarrow} \neg(\neg A \wedge \neg B) \vee \neg(\neg A \wedge \neg C) \stackrel{(\text{v})}{\Leftrightarrow} \neg(\neg A \wedge \neg B) \wedge \neg(\neg A \wedge \neg C)$
 $\stackrel{(\text{iv})}{\Leftrightarrow} (\neg(\neg A) \vee \neg(\neg B)) \wedge (\neg(\neg A) \vee \neg(\neg C)) \stackrel{(\text{ii})}{\Leftrightarrow} (A \vee B) \wedge (A \vee C). \quad \square$

Zeichen für ein Beweisende,
auch "qed" = "quod erat demonstrandum"
oder "wzwb" = "was zu beweisen war"

2.5 Dies war schon unser erster Beweis. Beachten Sie, dass wir für Regeln (5) und (7) im Beweis vorangehende Ergebnisse benutzt haben, was sehr elegant ist: wir müssen derart nicht mehr die Wahrheitstabellen durchgehen. Dabei ist für Sie nützlich, dass ich die verwendeten Regeln darzugenannt habe. Für (6) habe ich keinen einfacheren Beweis, der nur mit \neg, \vee, \wedge auskommt, gefunden.

2.6. Nun wollen wir noch Logikregeln mit " \Rightarrow " und " \Leftrightarrow " aufstellen.

Zunächst hatten wir folgende Umschreibungen fest:

- $(A \Rightarrow B) \stackrel{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} \neg A \vee B \stackrel{(\text{*)}}{\Leftrightarrow} \neg A \vee \neg(\neg B) \stackrel{(\text{**})}{\Leftrightarrow} \neg(A \wedge \neg B)$
 - $(A \Leftrightarrow B) \stackrel{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \stackrel{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$
- $$\stackrel{\text{Distr.}}{\Leftrightarrow} (\neg A \vee B) \wedge \neg B \vee (\neg A \vee B) \wedge A$$
- $$\stackrel{(\text{**})}{\Leftrightarrow} \neg A \wedge \neg B \vee \underline{B \wedge \neg B} \vee \underline{\neg A \wedge A} \vee B \wedge A$$
- $$\stackrel{(\text{**})}{\Leftrightarrow} (\neg A \wedge \neg B) \vee (A \wedge B)$$

Die letzte Zeile interpretieren wir als "A und B haben beide denselben Wahrheitswert."

2.7. Satz: Es gelten die Logikregeln für beliebige Aussagen A, B, C:

- (1) $(A \Rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$ modus ponens
- (2) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ Kontrapositionsregel
- (3) $(A \Rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$ modus tollens
- (4) $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ Transitivität von " \Rightarrow "
- (5) $(A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C) \Rightarrow (A \Leftrightarrow C)$ Transitivität von " \Leftrightarrow "

Vor dem Beweis die Bedeutung/Interpretation dieser Regeln:

Zu (1): Das ist die "Schlussfolgerung" schlechthin: Ist $A \Rightarrow B$ bewiesen, d.h. B wahr unter der Annahme, dass A wahr sei, und ist A wahr, muss auch B wahr sein.

Man sollte also sagen, dass die Behauptung B wahr ist unter der Voraussetzung A.

Zu (2): Die Begründung von " $A \Rightarrow B$ " kann indirekt erfolgen, wenn ein Beweis der Richtigkeit von $\neg B \Rightarrow \neg A$ vorliegt, wie folgt: " $A \Rightarrow B$ gilt, denn wenn ansonsten B falsch wäre (Achtung, Konjunktiv!), dann wäre auch schon A falsch gewesen (Schon wieder Konjunktiv!). Wir haben aber die Annahme A für $A \Rightarrow B$ gemacht, daher kann also B nicht falsch sein."

Bsp: "Wenn es regnet, dann ist die Straße nass" ist logisch gleichbedeutend zu "Wenn die Straße trocken ist, dann regnet es nicht."

Zu (4): Die Schlusskette $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$ zeigt $A \Rightarrow C$.

Diese schreibt man kurz als $A \Rightarrow B \Rightarrow C$.

 **Vorsicht:** Dies ist eine andere Aussage als $(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$ oder $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$!!

Zu (5): Analoges gilt für Äquivalenzketten $A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow C$. Vgl. Beweise oben!

Beweis des Satzes 2.7:

Zu (1): Denn in den Zeilen der Wahrheitstabelle für $A \Rightarrow B$, wo $A \Rightarrow B$ wahr ist und ebenso A wahr (das ist dort nur die 1. Zeile!), ist auch B wahr.

Oder so: $((A \Rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg(A \Rightarrow B) \vee \neg A \vee B) \Leftrightarrow (\neg(\neg A \vee B) \vee \neg A \vee B)$
 $\Leftrightarrow (A \wedge \neg B) \vee \neg A \vee B \Leftrightarrow (A \wedge \neg B) \vee \neg(A \wedge \neg B)$, ist immer wahr.

Zu (2): $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee \neg A) \Leftrightarrow \neg(\neg B) \vee \neg A \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$.

Zu (3): $(A \Rightarrow B) \wedge \neg B \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} (\neg B \Rightarrow \neg A) \wedge \neg B \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \neg A$.

Zu (4): $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)) \Leftrightarrow \neg((\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee C)) \vee (\neg A \vee C)$

$\Leftrightarrow \underline{A \wedge \neg B} \vee \underline{B \wedge \neg C} \vee \neg A \vee C \Leftrightarrow (A \wedge \neg B \vee \neg A) \vee (B \wedge \neg C \vee C)$

$\Leftrightarrow ((A \vee \neg A) \wedge (\neg B \vee \neg A)) \vee ((\neg C \vee C) \wedge (B \vee C))$

$\Leftrightarrow \neg B \vee \neg A \vee B \vee C \Leftrightarrow (B \vee \neg B) \vee (\neg A \vee C)$, ist immer wahr.

Zu (5): $(A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C) \Rightarrow (A \Leftrightarrow C)$ gilt,

denn $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \wedge (B \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow B)$

$\Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \stackrel{(4)}{\Rightarrow} (A \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow A) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow C)$. \square

Bemerkung: Haben wir hier nicht die zu zeigenden Aussagen beim Beweisen bereits verwendet? Ein berechtigter Einwand! Generell darf keine Vermischung von Objekt- und Metasprache erfolgen, um die Beweise zu führen. Dies könnte man noch sauberer argumentieren, was wir der Übersichtlichkeit halber lassen.

2.8. Kurz-Lernziele mathematischer Beweise: Bewiesen werden soll ein Satz, der als Implikation formuliert wurde, d.h. in der Form: "Satz: $A \Rightarrow B$ "

Dabei heißt A die Voraussetzung, und B die Behauptung des Satzes.

Man unterscheidet die folgenden zwei Arten von Beweisen:

1. direkter Beweis: Angabe einer Schlusskette $A \Rightarrow C_1 \Rightarrow C_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow C_n \Rightarrow B$

2. indirekter Beweis: Hier gibt es wieder zwei Arten:

- Kontrapositionsbeweis: direkter Beweis von $\neg B \Rightarrow \neg A$

- Widerspruchsbeweis: direkter Beweis von $A \wedge \neg B \Rightarrow C$,

wobei C falsch wie z.B. $A \wedge \neg A$, $0 = 1$, ...

- Dies zeigt $A \Rightarrow B$, da $(A \wedge B \Rightarrow C) \Leftrightarrow (\underbrace{\neg(A \wedge B)}_{A \Rightarrow B} \vee \underbrace{C}_F) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$.
- Wenn $C \Rightarrow A$ ist ebenso, da $(A \wedge B \Rightarrow A) \Leftrightarrow (\neg(A \wedge B) \vee A) \Leftrightarrow (\neg A \vee B) \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} (A \Rightarrow B)$.

Gerade das indirekte Schließen in Widerspruchsbeweisen werden wir noch genauer in Beispielen behandeln, speziell auch Tipps zum Aufschreiben geben.

Prädikatenlogik und Quantoren

Unser "Einsetzprinzip" mit Variablen soll im Folgenden in einem genaueren Rahmen erklärt werden. Wir gelangen auf diesem Wege zur Prädikatenlogik, welche diesem Prinzip entspricht und zusammen mit der Aussagenlogik eine Beschreibungsmöglichkeit mathematischer Zusammenhänge liefert.

2.9. Def.: Ein Prädikat ist ein Ausdruck mit Platzhaltern (Variablen) so, dass wannimmer man die Variablen durch Objekte des für die Variablen erlaubten Geltungsbereichs ersetzt (d.h. etwas EINSETZT), eine Aussage entsteht.

2.10. Bsp.: • "Jede gerade Quadratzahl ist durch 4 teilbar." ist eine atomare Aussage ohne Variablen.
Gemeint ist: 4 ist durch 4 teilbar, 16 ist durch 4 teilbar, 36 ist durch 4 teilbar...

Beispiele
für
Prädikate

→ Wollen sagen: "Ist x eine gerade Quadratzahl, dann ist x durch 4 teilbar."
Variable, wo gerade Quadratzahlen eingesetzt werden dürfen

• " $x - y$ ist eine Quadratzahl" (x, y sind Zahlen, etwa natürliche Zahlen)

→ Bsp.: $\underset{x=3}{3} - \underset{y=5}{5}$ ist eine Quadratzahl (f), $\underset{x=29}{29} - \underset{y=4}{4}$ ist eine Quadratzahl (w).

• " $x > 2 \Rightarrow x^2 > 4$ ", welche wahr für alle reellen Zahlen x ist

Bsp.: $3 > 2 \Rightarrow 3^2 > 4$, da $3 > 2$ w und $3^2 > 4$ w, etc.,
vgl. "ex falso quodlibet"

• "Ist x gerade Zahl, mindestens 4, dann ist x Summe von zwei Primzahlen",
(Goldbachsche Vermutung), Wahrheitswert unbekannt.

Durch Hinzufügen von Quantoren an Prädikaten entstehen neue Aussagen:

2.11. Def.: Sei ein Prädikat $P(x)$ gegeben, wo x die Variable eines bestimmten Geltungsbereichs ist.

- Der Allquantor \forall bedeutet "Für alle",

in Formeln: $\forall x : P(x)$ ist die Aussage "Für alle x ist $P(x)$ richtig",
also entsteht durch Einsetzen eines beliebigen x des Geltungsbereichs die wahre Aussage $P(x)$.

- Der Existenzquantor \exists bedeutet "Es existiert",

in Formeln: $\exists x : P(x)$ ist die Aussage
"Es gibt (mindestens) ein x so, dass $P(x)$ richtig ist",
also entsteht durch Einsetzen von mindestens einem x des Geltungsbereichs
die wahre Aussage $P(x)$.

- Der Existenzquantor $\exists!$ bedeutet "Es existiert genau ein",

in Formeln: $\exists! x : P(x)$ ist die Aussage
"Es gibt genau ein x so, dass $P(x)$ richtig ist",
also entsteht durch Einsetzen von ganz genau einem einzigen x des Geltungsbereichs
die wahre Aussage $P(x)$.

Den Doppelpunkt spricht man meist als "so, dass".

2.12. Bem.: 1. Ist $P(x)$ ein Prädikat von nur einer Variablen x , so "bindet"
ein Quantor diese Variable und es entsteht eine Aussage.

2. Ist $P(x, y, z, \dots)$ ein Prädikat von mehreren Variablen x, y, z, \dots , so
entsteht durch Quantifizierung in x ein Prädikat in den Variablen y, z, \dots ,
(nämlich $\forall x : P(x, y, z, \dots)$, $\exists x : P(x, y, z, \dots)$, $\exists! x : P(x, y, z, \dots)$).

3. "Es gibt höchstens ein x ..." kann zurückgeführt werden auf

"Es gibt kein x mit... oder es gibt genau ein x mit..."

dies ist die Negation von "es gibt ein x mit..."

Dafür wird (meist) kein separates Quantorenzeichen benutzt

2.13. Regeln zur Negation von Prädikaten mit Quantoren:

Es gilt:

$$\neg (\forall x: P(x)) \Leftrightarrow \exists x: \neg P(x)$$

$$\neg (\exists x: P(x)) \Leftrightarrow \forall x: \neg P(x)$$

} Bei Negation "kehren sich die Quantoren um".

2.14. Die Reihenfolge von Quantoren ist wesentlich:

Sei t eine Variable für Töpfe, d eine Variable für Deckel. Weiter sei $P(d, t)$ das Prädikat "Der Deckel d passt auf den Topf t ". Dann ist:

$\forall t \exists d: P(t, d)$ bedeutend zu "Zu jedem Topf gibt es einen passenden Deckel."

$\exists d \forall t: P(t, d)$ bedeutend zu "Es gibt einen Deckel, der passt auf jeden Topf."

Das bedeutet offensichtlich etwas Verschiedenes!

2.15. Verwendung von Quantoren:

1

• $\forall t, G(t): H(t)$ "Alle Tische, die grün sind, sind 1m hoch"
 ist äqu. zu $\forall t: G(t) \Rightarrow H(t)$ "Alle Tische erfüllen: ist der Tisch grün, dann ist er 1 m hoch"
 ⚠ Ist aber nicht äqu. zu: $\forall t: G(t) \wedge H(t)$ "Alle Tische sind grün und 1m hoch"

2

• $\exists t, G(t): H(t)$ "Es gibt einen grünen Tisch, der 1m hoch ist"
 ist äqu. zu $\exists t: G(t) \wedge H(t)$ "Es gibt einen Tisch, der grün ist und 1m hoch"
 ⚠ Ist aber nicht äqu. zu: $\exists t: G(t) \Rightarrow H(t)$ "Es gibt einen Tisch mit der Eigenschaft: Wenn er grün ist, dann ist er 1m hoch"

↪ ist auch wahr, wenn es mehrere roten Tische gibt!