Vorlesung Lineare Algebra I

SoSe'24 hhu
K. Halupczok

§1: Mathematische Grundbegriffe

L4: Praktische Tipps bei Beweisen

Stichworte: Voraussetzungen zusammenfassen, direkter und indirekter Beweis, Kontrapositionsbeweis, Widerspruchsbeweis, Beweistechniken, Widerlegen von (falschen) Aussagen, Vollständige Induktion

---

4.1. **Bsp.:** Satz: $\underbrace{\text{Sind } U,V \text{ nichtleere Mengen mit } U\cap V=\emptyset}_{\text{Vor. } A}$, $\underbrace{\text{dann ist}}_{\text{"}\Rightarrow\text{"}}$ $\underbrace{V\not\subseteq U}_{\text{Beh. } B}$.

Auch formulierbar als:
- $\forall\, U,V$ nichtleere Mengen, $U\cap V=\emptyset$: $V\not\subseteq U$. ①
- $\forall\, U,V$ Mengen: $\underbrace{U\neq\emptyset}_{A_1}\wedge \underbrace{V\neq\emptyset}_{A_2}\wedge \underbrace{U\cap V=\emptyset}_{A_3}\Rightarrow \underbrace{V\not\subseteq U}_{B}$. ②

Haben: ① $\Leftrightarrow$ ② laut Bem. 2.15.

Als kompletter deutscher Satz z.B.: • Von zwei disjunkten nichtleeren Mengen kann die eine nicht Teilmenge der anderen sein.

4.2. Zusammenfassen von Voraussetzungen ist möglich:

Lemma: Für beliebige Aussagen A,B,C gilt: $(A\wedge B\Rightarrow C)\Leftrightarrow(A\Rightarrow(B\Rightarrow C))$

l.S. = linke Seite
r.S. = rechte Seite

Beweis: l.S. $\Leftrightarrow \neg(A\wedge B)\vee C \Leftrightarrow \neg A\vee\neg B\vee C \Leftrightarrow \neg A\vee(B\Rightarrow C)\Leftrightarrow$ r.S. $\square$

Nach diesem Lemma ist $A_1\wedge A_2\wedge A_3\Rightarrow B \Leftrightarrow A_1\wedge A_2\Rightarrow(A_3\Rightarrow B)$ richtig,
sodass wir folgern: ② $\Leftrightarrow \forall\, U,V$ Mengen, $U\neq\emptyset\wedge V\neq\emptyset$: $U\cap V=\emptyset\Rightarrow V\not\subseteq U$.
"Für zwei nichtleere Mengen U,V gilt: Ist $U\cap V=\emptyset$, dann ist $V\not\subseteq U$."

Wir merken uns: Ist in der Behauptung eines Satzes eine Implikation $A_2\Rightarrow B$ formuliert, können die Voraussetzungen um A_2 ergänzt werden.

Ein Satz in der Formulierung: "Satz: Vor.: A_1
Beh.: $A_2\Rightarrow B$"

ist also äquivalent zur Formulierung: "Satz: Vor.: $A_1\wedge A_2$
Beh.: B" (Beweis: s. Lemma!)

Wenn man einen Satz formulieren möchte, kann man also bei Bedarf alle Voraussetzungen zusammenfassen.

4.3. <u>Ein praktischer Tipp:</u> Schreiben Sie Ihre Lösung von Klausur-/Übungsaufgaben in der Form wie hier auf als: "Vor.: ...
Beh.: ...
Bew.: ... □" } Dies ist für Ihren Korrektor übersichtlich und klar!

Der Satz im 1. Bsp. wäre dann z.B. schreibbar als:
Vor.: Seien U, V Mengen mit $U \neq \emptyset \wedge V \neq \emptyset \wedge U \cap V = \emptyset$.
Beh.: $V \nsubseteq U$.

Alternativ z.B.: Vor.: Seien U, V Mengen mit $U \neq \emptyset \wedge V \neq \emptyset$.
Beh.: Gilt $U \cap V = \emptyset$, dann ist $V \nsubseteq U$.

Bemerkung: "Seien" bzw. "Sei" ist Konjunktiv I für "Sind", "Ist", weiter "gelte" von "gilt"...
Typischerweise drückt man <u>Annahmen/Voraussetzungen</u> auf diese Weise im Konjunktiv I aus.

4.4. <u>Bsp:</u> Satz: Gerade Quadratzahlen sind durch 4 teilbar.
⇝ Umformulierung: Vor.: Sei n gerade Quadratzahl. (Konjunktiv, um Annahme/Vor. auszudrücken)
Beh.: 4 teilt n.

In Formeln: Vor.: $n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N} : n = 2m, \exists k \in \mathbb{N} : n = k^2$. (Kommas heißen "und")
Beh.: $\exists l \in \mathbb{N} : n = 4l$.

Das Zerlegen der Aussage einer Aufgabe in seine Bestandteile ist oft hilfreich wie hier, meist liegt der Beweis danach auf der Hand.

<u>Zu Beweisen</u>

4.5. Hier: "Bew.: Ist $n = 2m = k^2$, so folgt, dass k gerade ist, also $k = 2j$ mit $j \in \mathbb{N}$.
Dann ist $n = k^2 = (2j)^2 = 4 \cdot j^2$, also ist mit $l = j^2$ die Beh. richtig. □"

4.6. <u>Ein Bew. in Bsp. 4.1 wäre etwa:</u>
"Bew.: Ist $U \neq \emptyset \neq V$ mit $U \cap V = \emptyset$, dann ist $x \in V \setminus U$ für jedes $x \in V$,
da $V \neq \emptyset$ folgt also $\exists x \in V : x \notin U$, also $\neg(\forall x \in V : x \in U)$, also $\neg(V \subseteq U)$. □"

4.7. <u>Bem. dazu:</u> • Anstelle der Wörter "Ist", "dann ist", "für jedes", "also" könnte man auch die entsprechenden Symbole $\Rightarrow, \forall$ usw. einsetzen, wenn man den Beweis ganz im "Kalkül" formulieren möchte. Diese drücken aber "Meta-"Überlegungen aus, wie Sie schließen, d.h. wie Sie eine Schlusskette aufbauen, so dass es sich anbietet, für den Leser des Beweises dies so klarzustellen. Symbole und "Meta"-Wörter zu sehr mischen (etwa nur ein "also" durch "⇒" zu ersetzen) ist meist verwirrend und sollte möglichst vermieden werden.

- Das Wort "also" mehrmals zu verwenden ist völlig ok, solche Wiederholungen sind erwünscht: Wir schreiben keine Deutschaufsätze, sondern möchten präzise und verständlich sein.

Haben gesagt:

4.8. Direkter Beweis von $\underset{\text{Vor.}}{A} \Rightarrow \underset{\text{Beh.}}{B}$: Angabe einer Schlusskette $A \Rightarrow C_1 \Rightarrow C_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow C_k \Rightarrow B$ aus bekannten Implikationen $A \Rightarrow C_1$, $C_1 \Rightarrow C_2, \ldots, C_k \Rightarrow B$.

Dies zeigen wir in noch einem weiteren Bsp.:

4.9. Bsp.: Satz: Sei x reelle Zahl mit $x^2 = 1$. Dann ist $x = 1 \vee x = -1$.

Beweis: $x^2 = 1 \underset{\text{Umformen}}{\Rightarrow} x^2 - 1 = 0 \underset{\text{3. Bin. Formel}}{\Rightarrow} (x-1)(x+1) = 0 \underset{\text{Lemma: } xy=0 \Leftrightarrow x=0 \vee y=0}{\Rightarrow} x-1=0 \vee x+1=0 \underset{\text{Umformen}}{\Rightarrow} x=1 \vee x=-1$. □

- Hier ist die "Schlusskette" sehr klar. Ausführlicher mit "Meta"-Sprache wäre etwa so:

Beweis: Sei $x^2 = 1$. Nach Umformen erhalten wir $x^2 - 1 = 0$. Die Anwendung der 3. binomischen Formel zeigt dann, dass $(x-1)(x+1) = 0$ ist. Weil im Bereich der reellen Zahlen ein Produkt genau dann Null ist, wenn einer der Faktoren Null ist, folgt $x - 1 = 0$ oder $x + 1 = 0$. Also ist (wieder nach Umformen) $x = 1$ oder $x = -1$. qed

- Fraglich, was übersichtlicher ist! Eine ausführliche Version kann deutlich verständlicher sein. Was besser ist, kommt im Einzelnen darauf an.

Indirekte Beweise

4.10. Die erste Art des indirekten Beweises ist der Kontrapositionsbeweis, d.h. der direkte Beweis von $\neg B \Rightarrow \neg A$. Unter der Annahme $\neg B$ (die neue Vor. in diesem Beweis) wird $\neg A$ hergeleitet mittels einer Schlusskette $\neg B \Rightarrow C_1 \Rightarrow C_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow C_k \Rightarrow \neg A$. Beim Aufschreiben eines solchen Beweises muss zunächst $\neg B$ formuliert werden als Annahme, die manchmal auch im Konjunktiv steht.

4.11. Bsp.: Satz: Vor.: Sei $k \in \mathbb{N}$ und 10^k nicht durch 4 teilbar. Beh.: $k = 1$.

Bem.: Haben hier: $A_1 \wedge A_2 \Rightarrow B$, d.h. $\neg B \Rightarrow \neg A_1 \vee \neg A_2$ $\rightsquigarrow$ 1. Version

Äquivalent dazu ist: $A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow B)$, d.h. $A_1 \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A_2)$ $\rightarrow$ 2. Version

Bw. in 1. Version: Ist $k \neq 1$, dann ist $k \notin \mathbb{N}$ oder (wenn $k \in \mathbb{N}$) $k \geq 2$.
Also ist $k \notin \mathbb{N}$ oder (wenn $k \in \mathbb{N}$) $10^k = 4 \cdot 25 \cdot \underbrace{10^{k-2}}_{\in \mathbb{N},\, \text{da } k-2 \geq 0}$ durch 4 teilbar. □

Die 2. Version ist einfacher und klarer:

Bw. in 2. Version: Sei (für diesen Beweis) $k \in \mathbb{N}$. Ist $k \neq 1$, dann ist also $k \geq 2$.
Es folgt, dass $10^k = 4 \cdot 25 \cdot \underbrace{10^{k-2}}_{\in \mathbb{N},\, \text{da } k-2 \geq 0}$ durch 4 teilbar ist. □

Fazit: In Kontrapositionsbeweisen möchten wir "Grundannahmen" wie "Geltungsbereiche" als unveränderten Voraussetzungsteil beibehalten. Die Verwendung des Konjunktivs nur dafür macht "Grundannahmen" deutlich.

4.12. Die zweite Art des indirekten Beweises ist der Widerspruchsbeweis, dabei wird $A \wedge \neg B \Rightarrow C$ bewiesen (wo C falsch ist wie $0=1$ "Widerspruch"), was äqu. ist zu $A \Rightarrow B$, vgl. L 2.8.
Ein Widerspruchsbeweis ist also die Herleitung eines Widerspruchs C aus der Annahme $\neg B$ (und der Voraussetzung A), d.h. unter der Annahme, die Behauptung B sei falsch.

[Manche Leute verstehen das Wort "Annahme" nur so wie hier als Annahme des Gegenteils einer Behauptung in einem Widerspruchsbeweis. Nein: eine "Annahme" ist generell eine Voraussetzung, die man als wahr annimmt...]

4.13. Das Aufschreiben eines Widerspruchsbeweises geschieht in drei Schritten:

1. Formulierung der Annahme $\neg B$, wie z.B. "angenommen, B gelte nicht"
2. Formulierung eines direkten Beweises von $A \wedge \neg B \Rightarrow C$,
   d.h. die Herleitung von C aus der Annahme $\neg B$ und der Vor. A.
3. Feststellung, dass C falsch (oder $C \Leftrightarrow \neg A$) ist:
   "Widerspruch", "↯", und Beweis-Ende.

4.14. Bsp.: Satz: Für $x>9$ hat die Glg. $\sqrt{x}=2$ keine Lösung.
Beweis (durch Widerspruch):

1. Angenommen, $x \in \mathbb{R}$ sei eine Lösung der Glg. $\sqrt{x}=2$.
2. Dann folgt $2=\sqrt{x} > \sqrt{9} = 3$, also $2>3$.
   ↑ da $x>9$ und die $\sqrt{\ }$-Fkt. streng mon. w.
3. Widerspruch, da $2>3$ falsch ist. □

Kürzer: Beweis (durch Widerspruch): Andernfalls/Ansonsten sei $x \in \mathbb{R}$ mit $\sqrt{x}=2$.
Dann folgte $2=\sqrt{x}>\sqrt{9}=3$, also wäre $2>3$ ↯. □

"Ja wenn die Gleichung eine Lösung x hätte, dann wäre ja $2=\sqrt{x}>\sqrt{9}=3$, was aber falsch ist" → Hier wird das indirekte Schließen mit dem Konjunktiv II (hätte/wäre..) ausgedrückt. Manche sagen, ein Widerspruchsbeweis sollte der Genauigkeit halber komplett im Konjunktiv II ausgedrückt werden, um den "irrealen Sachverhalt", der zum Widerspruch geführt wird, zu verdeutlichen. Bei langen Widerspruchsbeweisen würde ich nur die Annahme $\neg B$ im Konjunktiv II formulieren.

Varianten von Beweisen

4.15. Der Ringschluss: Hat eine Behauptung die Form $B_1 \Leftrightarrow B_2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow B_k$, z.B. als "...dann sind folgende Aussagen äquivalent: 1) B_1, 2) B_2, ..., k) B_k", so muss nicht jede Äquivalenz einzeln gezeigt werden! Es genügt, nur Beweise von
1.) $B_1 \Rightarrow B_2$, 2.) $B_2 \Rightarrow B_3$, 3.) ..., k.) $B_k \Rightarrow B_1$ zu erbringen!
Ein Beweis von z.B. $B_2 \Leftarrow B_3$ folgt daraus bereits über den "Umweg"
$B_3 \Rightarrow B_4 \Rightarrow \ldots \Rightarrow B_k \Rightarrow B_1 \Rightarrow B_2$, und analog für die anderen Implikationen.

Hier wird ein Beweis effizient organisiert, indem für den Beweis überflüssige Implikationen ausgelassen werden. Der Ringschluss ist kein Zirkelschluss, wo fälschlicherweise die zu zeigende Behauptung in einem (falschen) Beweis verwendet wird.

4.16. Mengenvergleiche: Soll die Gleichheit zweier Mengen $U=V$ gezeigt werden, genügt es, die beiden Behauptungen $U \subseteq V$ und $U \supseteq V$ einzeln zu beweisen. Meistens ist eine der beiden Inklusionen $\subseteq, \supseteq$ leicht zu zeigen.

4.17. **Bsp.:** Satz: Seien U, V Mengen. Ist $U \subseteq V$, dann gilt $V \cup U = V$.

Beweis: „$\supseteq$" ist klar, zu „$\subseteq$": Sei $x \in V \cup U$, dann ist $x \in U$ oder $x \in V$.

Fall-unter-scheidung!
- Ist $x \in U$, so folgt $x \in V$ weil $U \subseteq V$ vorausgesetzt wurde.
- Ansonsten ist auch $x \in V$.

Somit folgt für jedes $x \in V \cup U$, dass $x \in V$ gilt, d.h. es folgt $V \cup U \subseteq V$. $\square$

Bem.: Alternativen in Fallunterscheidungen sind mit "oder" verknüpft, denn $x \in M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_m$ bedeutet $x \in M_1 \vee x \in M_2 \vee \ldots \vee x \in M_m$.

Ü Zeigen Sie: Satz: Seien U, V Mengen. Ist $U \subseteq V$, dann gilt $V \cap U = U$. Wie ändert sich der obige Beweis hier?

4.18. **Widerlegen von (falschen) Sätzen / Beweise von negierten Quantorenaussagen:**

Behauptet man, dass ein Satz/eine Aussage falsch ist, wird diese widerlegt. Das geschieht, indem das Gegenteil (= die Verneinung) bewiesen wird. Genauer:

a) Ist ein Satz der Form $A \Rightarrow \forall x: P(x)$ zu widerlegen, wird $\neg(A \Rightarrow \forall x: P(x))$ gezeigt, was äqu. ist zu $A \wedge \neg(\forall x: P(x))$ bzw. $A \wedge \exists x: \neg P(x)$. Dazu muss ein x angegeben werden, für dass $\neg P(x)$ gilt, also ein Gegenbeispiel angegeben/konstruiert bzw. dessen Existenz bewiesen werden (unter der Vor. A).

b) Ist ein Satz der Form $A \Rightarrow \exists x: P(x)$ zu widerlegen, wird $\neg(A \Rightarrow \exists x: P(x))$ gezeigt, was äqu. ist zu $A \wedge \neg(\exists x: P(x))$ bzw. $A \wedge \forall x: \neg P(x)$. Dazu muss für jedes x dann $\neg P(x)$ gezeigt werden (unter der Vor. A).

4.19. **Beispiele zum Widerlegen falscher Behauptungen:**

1. Beh.: Für jede nat. Zahl n ist n^2+1 mindestens gleich 5.
   $(\forall n \in \mathbb{N}: n^2+1 \geq 5)$.

   Falsch! Gegenbeispiel: $n = 1$, denn $1^2 + 1 = 2 < 5$.
   (Dies beweist das Gegenteil: $\exists n \in \mathbb{N}: n^2+1 < 5$).

2. Beh.: Es gibt eine nat. Zahl n, für die $n^2+1 < 2$ ist.
   $(\exists n \in \mathbb{N}: n^2+1 < 2)$. Falsch! Es gibt keine solche nat. Zahl.
   Das Gegenteil $\forall n \in \mathbb{N}: n^2+1 \geq 2$ ist wahr, denn
   $n^2+1 \geq 2 \Leftrightarrow n^2-1 \geq 0 \Leftrightarrow (n-1)\cdot(n+1) \geq 0 \Leftrightarrow n \geq 1 \wedge n \geq -1$ ✓. $\square$

4.20 **Vollständige Induktion:**

Das Prinzip der **vollständigen Induktion** (VI):

Es lautet:

(VI): $\forall A(x)$ Aussage/Prädikat in x: $\boxed{A(0) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}_0 : A(n) \Rightarrow A(n+1)) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 : A(n)}$

und bedeutet: Für jede Aussage in x gilt: Ist $A(0)$ wahr und ist für jede Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ wahr, dass mit $A(n)$ auch $A(n+1)$ richtig ist, dann gilt die Aussage für alle Zahlen $n \in \mathbb{N}_0$.

Anschaulich dann also: $\underset{\text{Ind. Anfang}}{A(0)} \underset{\text{Schritt } 0\to 1}{\Rightarrow} A(1) \underset{\text{Schritt } 1\to 2}{\Rightarrow} A(2) \underset{\text{Schritt } 2\to 3}{\Rightarrow} A(3) \Rightarrow \ldots \Rightarrow A(n) \underset{\text{Schritt } n\to n+1}{\Rightarrow} A(n+1) \Rightarrow \ldots$

Bem.:

1. Die Startaussage "$A(0)$" muss nicht unbedingt bei $n=0$ sein, das Prinzip ist auch für jeden anderen Startwert $n_0 \in \mathbb{N}$ richtig.
2. Die Startaussage "$A(0)$" heißt Induktionsanfang, die Implikation "$A(n) \Rightarrow A(n+1)$" heißt Induktionsschritt. Darin heißt $A(n)$ die Induktionsvoraussetzung und $A(n+1)$ die Induktionsbehauptung. Auch Ind.vor. wie "$A(0) \wedge \ldots \wedge A(n)$" sind möglich.
3. Nach dem Prinzip (VI) können Beweise von Aussagen über (alle) natürliche Zahlen geführt werden, man erhält so die Beweismethode der vollständigen Induktion, wofür wir gleich ein Bsp. bringen. Allerdings lässt sich nicht jede Aussage über natürliche Zahlen so beweisen.
4. Bem.: Das Prinzip (VI) kann als Satz aus den ZFC-Axiomen hergeleitet werden, sofern man die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ auf Standardweise erklärt. Für uns (vorerst): $\mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Bsp.: Der Satz vom kleinen Gauß: Für die Dreieckszahlen $d_1 := 1$, $d_{n+1} := d_n + (n+1)$ gilt: $\forall n \in \mathbb{N} : d_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Beweis (vollst. Ind.): • Induktionsanfang: ist $n=1$, ist $d_1 = \frac{1(1+1)}{2}$ richtig.

• Induktionsschritt: ist für ein (beliebiges, aber festes) $n \in \mathbb{N}$ die Formel $d_n = \frac{n(n+1)}{2}$ richtig, dann folgt $d_{n+1} \underset{\text{Rekursion}}{=} d_n + (n+1) \underset{\text{Induktionsvoraussetzung}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$, also ist die Formel auch mit $n+1$ anstelle von n richtig. Nach dem Prinzip (VI) folgt, dass die Formel für alle $n \in \mathbb{N}$ stimmt. $\square$