Vorlesung Lineare Algebra I

SoSe'24 hhu
K. Halupczok

§1: Mathematische Grundbegriffe

L5: Relationen

Stichworte: Kartesisches Produkt, Relation, Eigenschaften von Relationen, Äquivalenzrelation und -klassen, Quotientenmenge, Beispiele, Def. Abbildung/Funktion

---

5.1. Die Elemente einer Menge haben keine bestimmte Reihenfolge,

$$\text{z.B. } \{1,2\} = \{2,1\} = \{2,1,1\} = \{2,1,2,2\}.$$

Man möchte aber auch eine Reihung von Elementen (die im Sinne der Mengenlehre auch selbst wieder Mengen sind) haben, speziell Paare von Mengen (x,y) betrachten können, wo x die erste Menge (=1. Eintrag des Paars) und y die zweite Menge (=2. Eintrag des Paars) sein soll.

Dabei soll $(x,y)=(u,v)$ genau dann gelten, wenn $x=u$ und $y=v$ gilt.

Dies wird mit der Kuratowski-Konstruktion gelöst:

Wir setzen $(x,y) := \{\{x\},\{x,y\}\}$.

Denn $(x,y)=(u,v)$ bedeutet dann ja $\{\{x\},\{x,y\}\} = \{\{u\},\{u,v\}\}$.

Daraus folgern wir:

- Ist $\{x\}=\{u\}$, so ist $x=u$ und $\{x,y\}=\{u,v\}\overset{x=u}{=}\{x,v\}$, also $v=y$.
- Ist $\{x,y\}=\{u\}$, so ist $u=x=y$ und $\{x,y\}=\{u\}=\{x\}$, also die Menge einelementig, also $v=u=x=y$.

Man muss sich diese Konstruktion nicht merken.

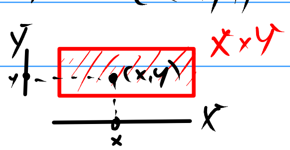
Für uns ist nur wichtig, dass man in der Sprache der Mengen Paare (x,y) mit der gewünschten Eigenschaft $(x,y)=(u,v) \Leftrightarrow x=u \wedge y=v$ bilden kann.

5.2. Def.: Sind X und Y Mengen, so besteht ihr Kartesisches Produkt $X\times Y$ aus allen Paaren (x,y) mit $x\in X$ und $y\in Y$, d.h.

$$X\times Y := \{(x,y);\ x\in X \wedge y\in Y\}.$$

(sprich "X Kreuz Y")

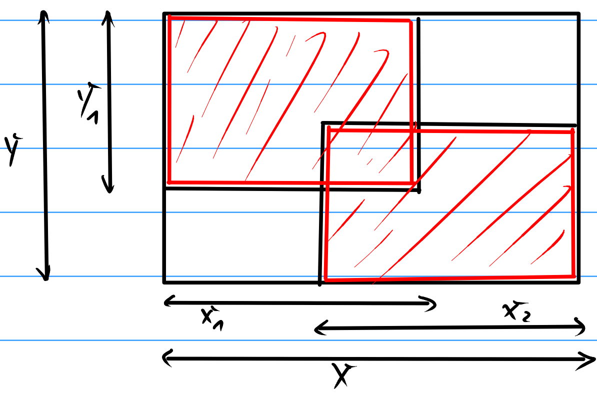
Graphische Anschauung:



"Kartesisches Koordinatensystem"

Bsp: $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ist eine Ebene, deren Punkte zwei reelle Koordinaten haben.

5.3. <u>Achtung:</u> Aus $X = X_1 \cup X_2$ und $Y = Y_1 \cup Y_2$ folgt noch lange nicht
$$X \times Y = \underline{(X_1 \times Y_1) \cup (X_2 \times Y_2)}:$$



Ü Konstruieren Sie hierfür ein nichtgraphisches, formal richtiges Gegenbeispiel!

5.4. <u>Mehrfache Produkte:</u>

Für drei Mengen X_1, X_2, X_3 haben wir
$$(X_1 \times X_2) \times X_3 = \{((x_1, x_2), x_3) \mid x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2,\ x_3 \in X_3\}$$
sowie
$$X_1 \times (X_2 \times X_3) = \{(x_1, (x_2, x_3)) \mid x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2,\ x_3 \in X_3\}.$$
Das ist zunächst ein formaler Unterschied, letztlich ist es aber egal, wie herum gruppiert wird, die Reihenfolge von x_1, x_2, x_3 steht fest. Wir nennen deswegen etwa $(x_1, x_2, x_3) := ((x_1, x_2), x_3)$ ein <u>Tripel</u> und bezeichnen in diesem Sinne mit $X_1 \times X_2 \times X_3 := \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2,\ x_3 \in X_3\}$ die Menge der <u>Tripel</u>.
Analog erhält man mit 4 Mengen <u>Quadrupel</u> usw.,
d.h. über die Rekursion $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) := ((x_1, \ldots, x_{n-1}), x_n)$ für $n \in \mathbb{N}$ können wir <u>n-Tupel</u> definieren.
Die Gleichheit zweier n-Tupel gilt dann ebenfalls komponentenweise.
Wir nennen $X_1 \times \ldots \times X_n$ das <u>kartesische Produkt</u> der Mengen $X_1, \ldots, X_n$, schreiben auch $\prod_{i=1}^{n} X_i$ dafür, gelegentlich wird $\mathop{\times}_{i=1}^{n} X_i$ dafür geschrieben.
Im Falle $X_1 = \ldots = X_n = X$ wird auch X^n geschrieben,
also z.B. $\underline{\underline{\mathbb{R}^2}} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\underline{\underline{\mathbb{R}^3}} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ usw.

5.5. Mit dem kartesischen Produkt können nicht nur (mengentheoretisch) neue mathematische Objekte gebildet werden, andererseits dient es zur Def. des <u>Relationsbegriffs</u> (ein Spezialfall einer Relation ist die Abbildung/Funktion, vgl. 5.19).

5.6. <u>Def.</u>: Jede Teilmenge $R \subseteq X_1 \times \ldots \times X_n$ von Mengen $X_1, \ldots, X_n$ heißt <u>n-stellige Relation</u>.

Von besonderer Bedeutung sind die zweistelligen Relationen $R \subseteq X \times Y$.

5.7. <u>Bsp.</u>: $X = \{1,2\}$, $Y = \{1,3,5\}$, $R := \{(1,3), (1,5), (2,3), (2,5)\}$ ist die Relation "<", dabei ist $\underbrace{x < y}_{\text{im Sinne nat. Zahlen}} \iff (x,y) \in R$.

$\rightsquigarrow$ identifiziere R mit $<$

Konvention: Schreiben <u>xRy</u> für die Aussage $(x,y) \in R$.

5.8. <u>Beispiele für Relationen sind:</u> "$\leq$" und "$=$" in $\mathbb{N}$, "$\subseteq$" in Mengensystemen, "$\perp$" (Senkrechtstehen) in der Menge aller Geraden, "$|$" (teilen) in $\mathbb{Z}$, ...

Im folgenden steht R im abstrakten Sinne für so eine Relation ("Vergleich") von Elementen einer Menge X mit denen einer anderen Menge Y (laut Def. wie oben).

Oft ist $X = Y$, dann sagt man, es liegt eine zweistellige Relation <u>in X</u> $(=Y)$ / <u>auf X</u> vor.

Für Relationen sind vor allem folgende Eigenschaften von Interesse:

5.9. • für <u>$R \subseteq X \times Y$</u>:

(F1) (1) R <u>linkstotal</u> $:\iff \forall x \in X \; \exists y \in Y : xRy$

(2) R <u>rechtstotal</u> $:\iff \forall y \in Y \; \exists x \in X : xRy$

(3) R <u>bitotal</u> $:\iff (1) \wedge (2)$

(4) R <u>linkseindeutig</u> $:\iff \forall x \in X \; \forall y \in Y \; \forall u \in X : xRy \wedge uRy \Rightarrow x = u$

(F2) (5) R <u>rechtseindeutig</u> $:\iff \forall x \in X \; \forall y \in Y \; \forall v \in Y : xRy \wedge xRv \Rightarrow y = v$

(6) R <u>eineindeutig</u> $:\iff (4) \wedge (5)$

5.10. • Für <u>$R \subseteq X \times X$</u>: <u>Anschaulich:</u>

(Ä1) (7) R <u>reflexiv</u> $:\iff \forall x \in X : xRx$ ⌜R enthält die "Diagonale" $\{(x,x);\, x \in X\}$⌟

(Ä2) (8) R <u>symmetrisch</u> $:\iff \forall x,y \in X : xRy \Rightarrow yRx$ ⌜R ist symmetrisch zur "Diagonalen"⌟

(9) R <u>asymmetrisch</u> $:\iff \forall x,y \in X : xRy \Rightarrow \neg(yRx)$ ⌜R ohne Diag. und ohne symmetrischen Paaren⌟

(10) R <u>antisymmetrisch/identitiv</u> $:\iff \forall x,y \in X : xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$
⌜Symmetrische Paare hat R nur auf der Diagonalen⌟

(11) R <u>konnex/linear</u> $:\iff \forall x,y \in X : xRy \vee yRx$ ⌜Je zwei El. können verglichen werden⌟

(Ä3) (12) R <u>transitiv</u> $:\iff \forall x,y,z \in X : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

5.11. Def.: • (1), (8), (12) def. eine Äquivalenzrelation // • (1), (10), (12) def. eine (Halb)ordnung
• (1), (5) def. eine Abbildung/Funktion // • (1), (10), (12), (11) def. eine Anordnung/lineare Ordnung
• Ist X eine Menge mit einer (Halb)ordnungsrelation "$\leq$", dann heißt $m \in X$ ein maximales Element von X, falls $\forall x \in X: m \leq x \Rightarrow x = m$

Ä-Relationen und Ä-Klassen

5.12. Def.: Sei X eine Menge. Eine Relation $R \subseteq X \times X$ in X heißt eine Äquivalenzrelation (hier kurz: Ä-Rel.), wenn sie

reflexiv (Ä1): $\forall x \in X: xRx$

symmetrisch (Ä2): $\forall x, y \in X: xRy \Rightarrow yRx$

und transitiv (Ä3): $\forall x, y, z \in X: xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$ ist.

Übliche Zeichen für Ä-Relationen sind $\sim, \simeq, \equiv, \cong, \approx$, etc. (die in bestimmten Kontexten aber meist auch speziellere Bedeutungen haben).
Wir wollen hier $\sim$ (sprich "Tilde") für eine Ä-Relation schreiben, also $x \sim y$ für $(x,y) \in R$.

5.13. Beispiele:
1. "=" Gleichheit bei Mengen, Zahlen, Geraden, ...
2. "ist gleich alt wie" in der Menge der Menschen
3. "ist im gleichen Bierkasten" in der Menge der Bierflaschen
4. "ist parallel zu" in der Menge der Geraden
5. "ist kongruent zu" in der Menge der Strecken
6. "hat gleiche Parität wie" in $\mathbb{N}_0$ [n, m haben dieselbe Parität, wenn sie beide gerade oder beide ungerade sind]
7. "hat dieselbe Richtung und Länge" in der Menge der Pfeile in der Ebene
8. "hat dieselbe Krümmung wie" in der Menge der Bananen

Jede Ä-Rel. $\sim$ in X zerlegt X in paarweise disjunkte, nichtleere Teilmengen, auch Klasseneinteilung genannt:

5.14. Def.: Die Menge aller zu $x \in X$ bzgl. $\sim$ in Relation stehenden Elemente von X heißt Äquivalenzklasse und wird mit $[x]$ bezeichnet, d.h. $[x] := \{y \in X \mid y \sim x\}$

Andere Notationen: $[\![x]\!]$, $\underline{x}$, $\bar{x}$, $\llcorner x \lrcorner$, ...

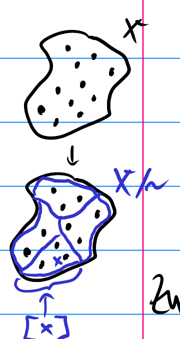
5.15. **Bem.:** 1) $[x]$ ist demnach die Äquivalenzklasse, die x enthält: $x \in [x]$, so dass $[x] \neq \emptyset$ folgt ⌈denn $\sim$ ist reflexiv⌋

2) Es gilt: $\forall x,y \in X: \ x \sim y \Leftrightarrow [x] = [y]$ (obwohl hier $x \neq y$ gelten kann!)

⌈„$\Rightarrow$": Sei $x \sim y$. Zu „$\subseteq$": ist $z \in [x]$, folgt $z \sim x$, mit $x \sim y$ folgt aus der Transitivität $z \sim y$, also ist $z \in [y]$. Zu „$\supseteq$": analog.

„$\Leftarrow$": Sei $[x] = [y]$. Dann ist $x \in [x] = [y]$, also $x \sim y$.⌋

3) Es gilt: $\forall x,y,z \in X: \ z \in [x] \wedge z \in [y] \Rightarrow [x] = [y]$. (Da $x \sim z \sim y$, also $x \sim y$.)



Umformuliert: $(\forall z \in X: z \in [x] \cap [y] \Rightarrow [x] = [y])$

$$\Leftrightarrow \neg\left(\exists z \in X: z \in [x] \cap [y] \wedge [x] \neq [y]\right)$$
$$\Leftrightarrow \neg\left([x] \cap [y] \neq \emptyset \wedge [x] \neq [y]\right)$$
$$\Leftrightarrow \left([x] \neq [y] \Rightarrow [x] \cap [y] = \emptyset\right)$$

Zwei verschiedene Ä-Klassen sind also disjunkt, d.h. ihr Durchschnitt ist $\emptyset$.
(Anders ausgedrückt: Jedes Element z gehört zu genau einer Ä-Klasse.)

4) Die Vereinigung aller Ä-Klassen ergibt X, d.h. $X = \bigcup_{x \in X} [x]$.
⌈„$\subseteq$": Ist $x \in X$, folgt $x \in [x]$, also $x \in$ r.S., „$\supseteq$": klar⌋

5) Obige Überlegungen zeigen: $x \sim y \Leftrightarrow [x] = [y] \Leftrightarrow [x] \cap [y] \neq \emptyset$.

Eine Ä-Rel. erzeugt also eine neue interessante Menge, die Menge aller Ä-Klassen:

5.16. **Def.:** Sei $\sim$ eine Ä-Rel. in X. Dann heißt

$$X/\sim \ := \{[x] \mid x \in X\}$$ (sprich "X modulo $\sim$", auch "X durch $\sim$")

die Quotientenmenge von X nach $\sim$.

- Ein (jedes) El. $y \in [x]$ heißt Repräsentant der Klasse $[x]$.
- Eine Menge $R \subseteq X$ heißt vollständiges Repräsentantensystem von $X/\sim$, wenn R genau ein Element jeder Klasse von $X/\sim$ enthält.

5.17. **Beispiele:** in obigen Beispielen 5.13., 1.-8. haben wir:

1. Ä-Kl.: Die für jedes x zugehörige Ä-Klasse ist $[x] = \{x\}$.
Also: $X/\sim \ = \{\{x\} \mid x \in X\}$ $\rightsquigarrow$ könnte mit X identifiziert werden, denn kriegen nichts Neues! Weiter: Nur $R = X$ ist vollst. Repr.system.

2. Alle Menschen mit gleichem Lebensjahr bilden jeweils eine Ä-Klasse.

3. Die Bierkästen, zusammen mit der Menge der Bierflaschen, die in keinem Kasten sind, sind genau die Ä-Klassen.

⌐Tatsächlich erzeugt jede Partition $X=\dot{\bigcup}_{i=1}^{n} X_i$ (alle $X_i \neq \emptyset$, und $\forall i\neq j: X_i \cap X_j = \emptyset$) von X eine Ä-Rel. $\sim$ in X durch $x\sim y :\Leftrightarrow \exists i \in \{1,\dots,n\}: x\in X_i \wedge y \in X_i$. ⌋

4. Alle Geraden mit gleicher Richtung gehören zu einer Ä-Klasse. Man kann sagen, über die Parallelität/Ä-Klassenbildung kann "Richtung" erklärt werden.

5. Alle Strecken mit gleicher Länge gehören zu einer Ä-Klasse. Man kann sagen, über die Kongruenz/Ä-Klassenbildung kann "Länge" erklärt werden. (Alle zum "Urmeter" gleichlangen Stäbe sind 1m lang per Definition...)

6. Haben $\mathbb{N}_0/\sim \; = \{\mathcal{G},\mathcal{U}\}$, wo $\mathcal{G}=\{2n \mid n\in\mathbb{N}_0\}$ die geraden und $\mathcal{U}=\{2n+1 \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ die ungeraden Zahlen sind.

Haben insb. $\mathbb{N}_0 = \mathcal{G} \,\dot{\cup}\, \mathcal{U}$. Bem.: Wir können mit El. von $\mathbb{N}_0/\sim$ "rechnen":

erklären dies repräsentantenweise: $\leftarrow \begin{cases} \mathcal{G}+\mathcal{G}:=\mathcal{G},\ \mathcal{G}+\mathcal{U}:=\mathcal{U}+\mathcal{G}:=\mathcal{U},\ \mathcal{U}+\mathcal{U}=\mathcal{G} \\ \mathcal{G}\cdot\mathcal{G}:=\mathcal{G},\ \mathcal{G}\cdot\mathcal{U}:=\mathcal{U}\cdot\mathcal{G}:=\mathcal{G},\ \mathcal{U}\cdot\mathcal{U}=\mathcal{U} \end{cases}$

Haben ja: $\mathcal{G}=[0]$, $\mathcal{U}=[1]$,
und $[0]+[0]:=[0]$, aber auch $[4]+[6]:=[10]=[0]$...
und $[0]+[1]:=[1]$, aber auch $[4]+[7]:=[11]=[1]$...
usw. Werden diese Idee später in L7 vertiefen.

(Nennen $\mathbb{N}_0/\sim$ auch $\mathbb{F}_2 \rightsquigarrow$ 2-elementiger Körper.)

7. Die Ä-Klassen sind die Vektoren, welche jeweils durch einen Pfeil repräsentiert werden, der vom Ursprung aus beginnt. Diese repräsentierenden Pfeile werden durch ihren Endpunkt an der Pfeilspitze dargestellt, den wir mit einem Tupel angeben.

8. Alle Bananen gleicher Krümmung gehören zu einer Ä-Klasse. Den Begriff "Krümmung" kann man mit Mitteln der Analysis präzisieren.

5.18. Wir möchten nun auch Relationen $R \subseteq X \times Y$ mit zwei unterschiedlichen Mengen untersuchen, also Elemente von X mit denen von Y "vergleichen", z.B. $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, $R \subseteq \{\text{Geraden}\} \times \{\text{Vektoren}\}$, $R \subseteq \{\text{Äpfel}\} \times \{\text{Birnen}\}$, ... Wenn die beiden Mengen sehr unterschiedlich sind, würde man eher nicht mehr von "Vergleich", sondern von "Zuordnung" sprechen, so dass man auf diesem Wege zum Begriff der Abbildung kommt. Relationen stellen i.a. keine eindeutigen Beziehungen zwischen Mengen her d.h. einem Element in X können durchaus mehrere Elemente aus Y zugeordnet sein. Von einer Abbildung wird verlangt, dass sie die ganze Menge X eindeutig in die andere Menge Y abbilden: Jedem $x \in X$ wird genau ein $y \in Y$ zugeordnet.

5.19. Def.: Eine linkstotale (F1), rechtseindeutige (F2) Relation $f \subseteq X \times Y$ heißt **Abbildung** (auch: **Funktion**, kurz: Abb./Fkt.).

Vgl. 5.9.: f linkstotal $:\Leftrightarrow \forall x \in X \; \exists y \in Y: x f y$

f rechtseindeutig $:\Leftrightarrow \forall x \in X \; \forall y \in Y \; \forall v \in Y: x f y \wedge x f v \Rightarrow y = v$

beides: $\exists!\, y \in Y: x f y$

↑ sprich "es existiert genau ein" y...
bzw. eindeutig ein...

Notation: Statt $x f y$ bzw. $(x,y) \in f$ schreibt man auch $x \mapsto y$ oder $x \mapsto f(x)$ mit $f(x) = y$. Statt $f \subseteq X \times Y$ wird $f: X \to Y$ oder $X \xrightarrow{f} Y$ geschrieben.

5.20. Bem.: Eine Abbildung ist – als Menge – dasselbe wie ihr Graph/Schaubild. Diese Def. mit Mengen muss man sich nicht merken, vielmehr ist ihre Eigenschaft wichtig, dass jedem $x \in X$ ein zugehöriges $y \in Y$ eindeutig zugeordnet wird. Die Bezeichnung $f(x)$ macht die Abhängigkeit des Elements $y = f(x)$ von x deutlich.