

Vorlesung Lineare Algebra I

SoSe'24 hhu

K. Halupczok

§1: Mathematische Grundbegriffe

L6: Abbildungen

Stichworte: Def. Abbildung, Bild und Urbild, surjektiv/injektiv/bijektiv, Komposition, Umkehrabb./inverse Abbildung, besondere Abbildungen, endliche Mengen

Häufig: $f: X \rightarrow Y$ mit Zuordnung $\xrightarrow{\text{statt } x \mapsto f(x) \text{ oder } (x, y) \in f} x \mapsto y = f(x)$ ist Abb., falls $\forall x \in X \exists ! y \in Y: f(x) = y$.

6.1. Def.: In einer Abb. $f: X \rightarrow Y$ heißt die Menge X der Definitionsbereich bzw. Definitionsmenge und die Menge Y der Zielbereich / Wertebereich / Bildbereich bzw. Zielmenge / Wertemenge / Bildmenge ("Werte/Bild" wegen Verwechslungsgefahr nicht so gerne, zu "Bild"/"Bildmenge" s.u.).

Die Menge $f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subseteq X \times Y$ heißt Graph von f. ("Schaubild")

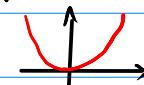
6.2. Bem.: • Eine Abb. wird durch 3 Angaben festgelegt: Def.-bereich/Zielbereich/Abb.-Vorschrift.

• Zwei Abbildungen $f, g: X \rightarrow Y$ heißen gleich, falls $\forall x \in X: f(x) = g(x)$.

• Eine Abb. $g: U \rightarrow Y$ heißt Einschränkung von $f: X \rightarrow Y$, falls $U \subseteq X$ und $g(u) = f(u)$ für alle $u \in U$.

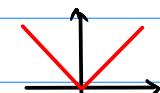
Notation: $g = f|_U$. $g: V \rightarrow Y$ heißt Fortsetzung von $f: X \rightarrow Y$, falls $X \subseteq V$ und $f = g|_X$.

6.3. Bsp.: 1. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ Standardparabel



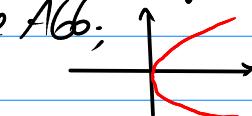
2. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto |x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0, \\ -x, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$

Absolutbetrag

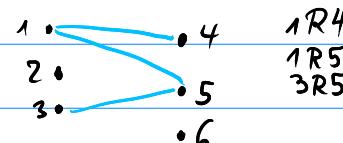


3. $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $R = \{(x^2, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ ist keine Abb.;

nur eine linkseindeutige, rechtsstabile Relation



4. $R \subseteq \{1, 2, 3\} \times \{4, 5, 6\}$, $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{4, 5, 6\}$

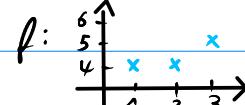
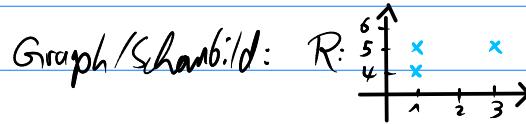


$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{\quad} & 4 \\ 2 & \xrightarrow{\quad} & 5 \\ 3 & \xrightarrow{\quad} & 6 \end{array} \quad R^4 \quad R^5 \quad R^6$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{\quad} & 4 \\ 2 & \xrightarrow{\quad} & 5 \\ 3 & \xrightarrow{\quad} & 6 \end{array} \quad f(1)=4=f(2), \quad f(3)=5$$

R ist Relation, keine Fkt.

von jedem El. des Def.-bereichs geht genau ein Pfeil aus $\rightsquigarrow f$ ist Abb.



6.4. Def.: Wenn $y = f(x)$ gilt, so heißt y das Bild von x und x das Urbild von y .

6.5. Bem.: Jedes x hat genau ein Bild, nämlich $f(x)$. Aber ein $y \in Y$ kann kein, ein oder mehrere Urbilder haben. Das Konzept "Bild"/"Urbild" lässt sich wie folgt auf Teilmengen von X bzw. Y übertragen:

6.6. Def.: Ist $A \subseteq X$, so heißt $f(A) := \{f(a) \mid a \in A\} \subseteq Y$ das Bild von A,

analog: $f(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$ ist $B \subseteq Y$, so heißt $f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\} \subseteq X$ das Urbild von B.

6.7. Bem./Fazit: • $f^{-1}(B)$ ist ein reines Symbol, mit f^{-1} ist (hier) keine Abb. gemeint.

• Ist $A = X$, so heißt $f(X)$ das Bild von X unter f bzw. Bild von f.

• Für $x \in X$ ist $f(\{x\}) = \{f(x)\}$ einelementig, für $y \in Y$ kann $f^{-1}(\{y\})$ aber aus keinem, einem oder mehreren Elementen bestehen.

Man schreibt einfache auch $f^{-1}(y)$ für $f^{-1}(\{y\})$, wenn klar, was gemeint ist.

6.8. Bsp.: Für $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(u, v) = u + v$ ist $f^{-1}(z) = \{(u, v) \mid u + v = z\} = \{(u, z-u) \mid u \in \mathbb{R}\}$

eigentlich: $f((u, v))$, lassen überflüssige Klammern weg wenn Kontext klar...

~Alle Punkte einer Geraden $g: y = -x + z$ werden von f auf den y-Achsenabschnitt z abgebildet.

Aufgaben

6.9. Def.: Eine Abb. $f: X \rightarrow Y$ heißt

• injektiv, falls es zu jedem $y \in Y$ höchstens ein x gibt mit $f(x) = y$

$$\forall y \in Y \quad \forall x_1, x_2 \in X: f(x_1) = y = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

bzw. $\forall y \in Y: f^{-1}(y)$ ist höchstens einelementig

• surjektiv, falls es zu jedem $y \in Y$ mindestens ein x gibt mit $f(x) = y$

$$\forall y \in Y \quad \exists x \in X: f(x) = y$$

bzw. $\forall y \in Y: f^{-1}(y)$ ist mindestens einelementig

• bijektiv, falls es zu jedem $y \in Y$ genau ein x gibt mit $f(x) = y$

$$\forall y \in Y \quad \exists! x \in X: f(x) = y$$

bzw. $\forall y \in Y: f^{-1}(y)$ ist einelementig

Somit: bijektiv \Leftrightarrow injektiv \wedge surjektiv

Bem.: f ist injektiv, wenn f (als Relation) linkseindeutig. f ist surjektiv, wenn f (als Relation) rechtstotal ist. • f ist bijektiv, wenn f (als Relation) bijektiv eindeutig.

6.10. Bsp.: Bsp. A66.:	$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	$f(x) = x^2$
injektiv, nicht surj.:	$f(x) = e^x$	$f: \mathbb{R}_{\leq 0} \rightarrow \mathbb{R}$
surjektiv, nicht inj.:	$f(x) = x^3 - x$	$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$
nicht inj., nicht surj.:	$f(x) = x^2$	$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
bijektiv:	$f(x) = x^3$	$f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$

Komposition und Inverse von Abbildungen

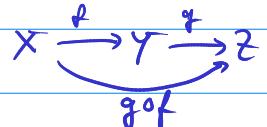
6.11. Def.: Seien $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ Abbildungen.

Dann heißtt $g \circ f: X \rightarrow Z$, $g \circ f(x) := g(f(x))$ die

Komposition / Hintereinanderausführung von f und g .

Lies: "g nach f" für $g \circ f$, man beachte die Reihenfolge!

("g nach f" heißtt: erst f, dann g anwenden...)



6.12. Def.: Auf jeder Menge X ($\neq \emptyset$) kann die Identität (sabb.) identische Abb.

definiert werden durch $\text{id}_X: X \rightarrow X$, $x \mapsto x$.

6.13. Bem.: • Für jede Abb. $f: X \rightarrow Y$ gilt $\text{id}_Y \circ f = f$ und $f \circ \text{id}_X = f$.

→ "neutrale" Abbildungen id_X , id_Y bezgl. o

• Klar gilt i.a. $f \circ g = g \circ f$, auch wenn $f, g: X \rightarrow X$, z.B. $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 1$
 $\Rightarrow f(g(1)) = f(2) = 4 \neq 2 = g(1) = g(f(1))$.

6.14. Def.: Seien $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow X$ Abbildungen zwischen Mengen X und Y .

Dann heißtt g eine

- Rechtsinverse von f , falls $f \circ g = \text{id}_Y$

- Linksinverse von f , falls $g \circ f = \text{id}_X$

- Inverse von f , falls $g \circ f = \text{id}_X$ und $f \circ g = \text{id}_Y$, d.h.

falls g sowohl Links- als auch Rechtsinverse von f ist.

(Gelegentlich auch Umkehrabb. von f genannt.)

Wir zeigen, dass diese Begriffe eng mit obigen Abbildungstypen zusammenhängen.

6.15. Lemma A: Sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abb. Dann sind äquivalent: (i) f ist injektiv

(ii) f hat eine Linksinverse

Merkregel: injektiv (\Leftrightarrow) Linksinverse

Beweis: Zu (i) \Rightarrow (ii): Wähle $y \in Y$ bel. Wir def. $g: Y \rightarrow X$ durch

$$g(y) := \begin{cases} x, & \text{falls } f(x)=y \text{ gilt,} \\ z, & \text{falls es kein } x \text{ mit } f(x)=y \text{ gibt.} \end{cases}$$

Dann es zu jedem $y \in Y$ nach Annahme "injektiv" höchstens ein $x \in X$ mit $f(x)=y$ gibt.

Können wir g so definieren. Für ein bel. $x \in X$ gilt dann $g(f(x))=x$, also $g \circ f = \text{id}_X$.

Zu (ii) \Rightarrow (i): Sei g eine Linksinverse. Angenommen, $m, n \in X$ mit $m \neq n$. Dann gilt

$g(f(m)) = m \neq n = g(f(n))$, also folgt $f(m) \neq f(n)$. Dies zeigt, dass f injektiv. \square

Analog gilt (muss aber anders bewiesen werden):

6.16. Lemma B: Sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abb. Dann sind äquivalent: (i) f ist surjektiv

(ii) f hat eine Rechtsinverse

Merkregel: surjektiv \Leftrightarrow rechtsinverse

Beweis: Zu (i) \Rightarrow (ii): Sei f surjektiv, zu jedem $y \in Y$ gibt es dann mind. ein $x \in X$

mit $f(x)=y$. Wir wählen zu jedem y ein solches x aus und setzen $g(y)=x$.

Dann gilt nach Konstruktion $f(g(y)) = f(x) = y$, also ist g Rechtsinverse.

Zu (ii) \Rightarrow (i): Sei g eine Rechtsinverse. Für jedes $y \in Y$ gilt dann $f(g(y)) = f \circ g(y) = y$, also hat $g(y)$ als Bild (unter f) genau das Element y , d.h. y hat mind. ein Urbild. \square

6.17. Bem.: Lemma B ist tiefer, als es aussieht: Zum Beweis von (i) \Rightarrow (ii) haben wir zu jedem $y \in Y$ ein Urbild "ausgewählt". Dass man das tun kann, ist nicht selbstverständlich, aber ein wichtiges Prinzip der Mengenlehre, nämlich das sogenannte "Auswahlaxiom" (falschlich ist Lemma B dann äquivalent).

Wir fassen Lemma A und B zusammen:

6.18. Lemma C: Sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abb. Wenn f eine Linksinverse $g: Y \rightarrow X$ und eine Rechtsinverse $h: Y \rightarrow X$ hat, dann ist $g=h$ und f ist bijektiv.

Beweis: Nach Voraussetzung gilt $f \circ h = \text{id}_Y$ und $g \circ f = \text{id}_X$, also folgt

$g(y) = g(f \circ h(y)) = g(f(h(y))) = g \circ f(h(y)) = h(y)$ für alle $y \in Y$. Also ist $g=h$. \square

6.19. Korollar: Eine bijektive Abb. $f: X \rightarrow Y$ hat genau eine Inverse.

Beweis: Seien g und h Inverse von f . Dann ist insb. g Rechtsinverse von f und h Linksinverse von f , nach Lemma C folgt $g = h$. \square

6.20. Bsp.: 1. exp: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ ist bij., die Inverse heißt log: $\mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ (Logarithmus),
es gilt $\exp(\log(x)) = x$ bzw. $\log(\exp(y)) = y$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$, $x > 0$.

2. $q: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, $x \mapsto x^2$ ist bij., die Inverse heißt $\sqrt{}: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ (Wurzel),
d.h. \sqrt{y} ist eine Zahl ≥ 0 mit $(\sqrt{y})^2 = q \circ \sqrt{}(y) = y = \sqrt{} \circ q(y) = \sqrt{y^2}$,
sofern $y > 0$ ist.

3. $\tilde{q}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto x^2$ ist surj., die Rechtsinverse ist $\tilde{\sqrt{}}: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$, es gilt $\tilde{q} \circ \tilde{\sqrt{}}(y) = (\sqrt{y})^2 = y$.

4. $p_n: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, $x \mapsto x^n$ ist bij., die Inverse ist (per Def.) die n -te Wurzel $\sqrt[n]{}$.

Besondere Abbildungen

Charakteristische Abbildungen

6.21. Def.: Ist X eine Menge und $A \subseteq X$, so def. wir eine zugehörige Abb. durch

$$X_A: X \rightarrow \{0, 1\}, \quad X_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A, \\ 0, & \text{falls } x \notin A. \end{cases}$$

Man nennt X_A die charakteristische Funktion von A . Klar: $X_A = X_B \Leftrightarrow A = B$.

6.22. Bem.: Ist umgekehrt eine Abb. $f: X \rightarrow \{0, 1\}$ geg., so ist $f = X_A$ mit

$$A := \{x \in X \mid f(x) = 1\}, \quad \text{d.h. jede 0-1-Abb. ist eine charakteristische Fkt.}$$

Folgen 6.23. Def.: Eine Abb. $x: \mathbb{N} \rightarrow X$ in eine Menge X heißt Folge und wird als $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ geschrieben, d.h. schreiben x_n für $x(n)$.

- \mathbb{N} heißt Indexmenge der Folge.

6.24. Bem.: Für $X = \mathbb{R}$ hat man die in der Analysis gebräuchlichen reellen Zahlenfolgen, mit deren Hilfe man die Approximation an andere reelle Zahlen untersucht ("Konvergenz").

- Natürlich können auch Folgen von Folgen etc. untersucht werden.

- Für Teilmengen $A \subseteq \mathbb{N}_0$ kann die zugehörige charakteristische Fkt. als zugehörige 0-1-Folge (d.h. Abb. $\mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$) aufgefasst werden und umgekehrt.

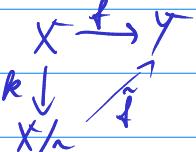
- Für irgend eine Menge $I \neq \emptyset$ kann eine Abb. $x: I \rightarrow X$ in eine Menge X als $(x_i)_{i \in I}$ geschrieben werden. Man nennt $(x_i)_{i \in I}$ eine Familie / Tupel mit Indexmenge I .

Abbildungen bei Quotientenmengen

- 6.25. Sei X eine nichtleere Menge und \sim eine Ä'-Relation. Die Quotientenmenge ist $X/\sim = \{[x] \mid x \in X\}$, die Menge der Ä'-Klassen $[x] = \{y \in X \mid y \sim x\}$. Es gibt immer eine "natürliche" Abb. $\pi: X \rightarrow X/\sim$

ein
solches
Schaubild
heißt
"kommu-
tatives
Diagramm"

falls
 $f = \tilde{f} \circ \pi$



$x \mapsto [x]$, die jedem x ihre Klasse $[x]$ zuordnet, oft auch Kanonische Abb. genannt (sie ist übrigens surjektiv).

Ist eine Abb. $f: X \rightarrow Y$ derart, dass sie konstant auf den Klassen $[x]$ ist, d.h. $\forall x \in X \forall y, z \in [x]: f(y) = f(z)$, dann gilt es eine Abb.

$\tilde{f}: X/\sim \rightarrow Y$, die sich auf den $[x]$ wie f verhält ("von f induziert wird"), d.h. für die $f = \tilde{f} \circ \pi$ gilt: Es ist einfach $\tilde{f}([x]):= f(x)$ erklärt. Diese Def. ist wohldefiniert (d.h. auch hier repräsentantenunabh.) nach Vor.

- 6.26. Bsp.: $X = \mathbb{Z}$, $m \sim n \Leftrightarrow 4 \mid m-n$, $\mathbb{Z}/\sim = \{[0], [1], [2], [3]\}$. Die Abb.

$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(m) := i^m$ induziert $\tilde{f}: \mathbb{Z}/\sim \rightarrow \mathbb{C}$, $\tilde{f}([0]) = 1$, $\tilde{f}([1]) = i$, $\tilde{f}([2]) = -1$, $\tilde{f}([3]) = -i$.

! vgl. L8

Bijective Abbildungen setzen Df.- und Zielbereich in direkte Beziehung. Dann spielt die "Anzahl" der Elemente eine Rolle:

- 6.27. Def.: Eine Menge X heißt endlich, wenn es eine nat. Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ und eine bijektive Abbildung $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow X$ gibt.

Dann gilt $X = \{f(1), f(2), \dots, f(n)\}$ und $f(i) \neq f(j)$ für $i \neq j$.

Die Zahl n heißt dann Kardinalität / Mächtigkeit / Länge von X .

Notation: $\#X = n$ (oder $|X| = n$ oder $\text{card}(X) = n$)

Wir sagen auch, n ist die Anzahl der Elemente von X .

- 6.28. Bem.: Es gilt: $\#X = 0 \Leftrightarrow X = \emptyset$.

• Eine Menge X heißt unendlich, wenn sie nicht endlich ist, dies kann man symbolisch als $\#X = \infty$ schreiben.

- 6.29. Satz: (1) Sind X, Y endlich, $\#X \leq \#Y$ und $f: X \rightarrow Y$ inj., so ist f bijektiv.

(2) Sind X, Y endlich, $\#X \geq \#Y$ und $f: X \rightarrow Y$ surj., so ist f bijektiv.

Bew.: (1)

- 6.30. Korollar: Sind X, Y endlich, $\#X = \#Y$, $f: X \rightarrow Y$ eine Abb., so sind äquivalent:

(i) f ist bijektiv, (ii) f ist injektiv, (iii) f ist surjektiv.