Vorlesung Lineare Algebra I

SoSe'24 hhu
K. Halupczok

§1: Mathematische Grundbegriffe

L6: Abbildungen

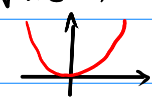
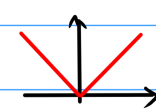
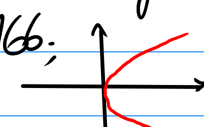
Stichworte: Def. Abbildung, Bild und Urbild, surjektiv/injektiv/bijektiv, Komposition, Umkehrabb./inverse Abbildung, besondere Abbildungen, endliche Mengen

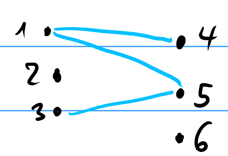
---

Hatten: $f: X \to Y$ mit Zuordnung $\overbrace{x \mapsto y = f(x)}^{\text{statt } x f y \Leftrightarrow (x,y) \in f}$ ist Abb., falls $\forall x \in X \; \exists!\, y \in Y: f(x) = y$.

6.1 **Def.:** In einer Abb. $f: X \to Y$ heißt die Menge X der Definitionsbereich bzw. Definitionsmenge und die Menge Y der Zielbereich / Wertebereich / Bildbereich bzw. Zielmenge / Wertemenge / Bildmenge ["Werte/Bild" wegen Verwechslungsgefahr nicht so gerne, zu "Bild" / "Bildmenge" s.u.].
Die Menge $f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subseteq X \times Y$ heißt Graph von f. ("Schaubild")

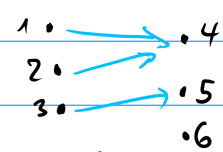
6.2 **Bem.:** • Eine Abb. wird durch 3 Angaben festgelegt: Def.bereich / Zielbereich / Abb.vorschrift.
Zwei Abbildungen $f, g: X \to Y$ heißen gleich, falls $\forall x \in X: f(x) = g(x)$.
• Eine Abb. $g: U \to Y$ heißt Einschränkung von $f: X \to Y$, falls $U \subseteq X$ und $g(u) = f(u)$ für alle $u \in U$.
Notation: $g = f|_U$. $g: V \to Y$ heißt Fortsetzung von $f: X \to Y$, falls $X \subseteq V$ und $f = g|_X$.

6.3 **Bsp.:**
1. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ Standardparabel 
2. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0, \\ -x, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$ Absolutbetrag 
3. $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $R = \{(x^2, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ ist keine Abb., nur eine linkseindeutige, rechtstotale Relation 
4. $R \subseteq \{1,2,3\} \times \{4,5,6\}$, $f: \{1,2,3\} \to \{4,5,6\}$



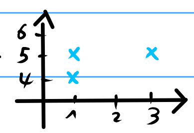
$1R4$
$1R5$
$3R5$

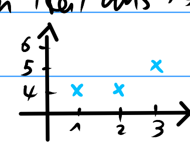
R ist Relation, keine Fkt.



$f(1) = 4 = f(2)$,
$f(3) = 5$

von jedem El. des Def.bereichs geht genau ein Pfeil aus $\rightsquigarrow$ f ist Abb.

Graph/Schaubild: R: 

f: 

6.4. Def.: Wenn $y=f(x)$ gilt, so heißt y das Bild von x und x das Urbild von y.

6.5. Bem.: Jedes x hat genau ein Bild, nämlich $f(x)$. Aber ein $y\in Y$ kann kein, ein oder mehrere Urbilder haben. Das Konzept "Bild"/"Urbild" lässt sich wie folgt auf Teilmengen von X bzw. Y übertragen:

6.6. Def.: Ist $A\subseteq X$, so heißt $f(A):=\{f(a)\mid a\in A\}\subseteq Y$ das Bild von A,
ist $B\subseteq Y$, so heißt $f^{-1}(B):=\{x\in X\mid f(x)\in B\}\subseteq X$ das Urbild von B.

auch: $f^{-1}(B)=\{x\mid \exists b\in B: f(x)=b\}$

6.7. Bem./Zusatz:
- $f^{-1}(B)$ ist ein reines Symbol, mit f^{-1} ist (hier) keine Abb. gemeint.
- Ist $A=X$, so heißt $f(X)$ das Bild von X unter f bzw. Bild von f.
- Für $x\in X$ ist $f(\{x\})=\{f(x)\}$ einelementig, für $y\in Y$ kann $f^{-1}(\{y\})$ aber aus keinem, einem oder mehreren Elementen bestehen.

  Man schreibt einfacher auch $f^{-1}(y)$ für $f^{-1}(\{y\})$, wenn klar, was gemeint ist.

6.8. Bsp.: Für $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(u,v)=u+v$ ist $f^{-1}(z)=\{(u,v)\mid u+v=z\}=\{(u,z-u)\mid u\in\mathbb{R}\}$

eigentlich: $f((u,v))$, lassen überflüssige Klammern weg wenn Kontext klar...

$\rightsquigarrow$ Alle Punkte einer Geraden $g: y=-x+z$ werden von f auf den y-Achsenabschnitt z abgebildet.

Abbildungstypen

6.9. Def.: Eine Abb. $f:X\to Y$ heißt
- injektiv, falls es zu jedem $y\in Y$ höchstens ein x gibt mit $f(x)=y$
  $\ulcorner \forall y\in Y\ \forall x_1,x_2\in X: f(x_1)=y=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$
  bzw. $\forall y\in Y$: $f^{-1}(y)$ ist höchstens einelementig $\lrcorner$
- surjektiv, falls es zu jedem $y\in Y$ mindestens ein x gibt mit $f(x)=y$
  $\ulcorner \forall y\in Y\ \exists x\in X: f(x)=y$
  bzw. $\forall y\in Y$: $f^{-1}(y)$ ist mindestens einelementig $\lrcorner$
- bijektiv, falls es zu jedem $y\in Y$ genau ein x gibt mit $f(x)=y$
  $\ulcorner \forall y\in Y\ \exists!\, x\in X: f(x)=y$
  bzw. $\forall y\in Y$: $f^{-1}(y)$ ist einelementig $\lrcorner$

Somit: bijektiv $\Leftrightarrow$ injektiv $\wedge$ surjektiv

Bem.: • f ist injektiv, wenn f (als Relation) linkseindeutig. • f ist surjektiv, wenn f (als Relation) rechtstotal ist. • f ist bijektiv, wenn f (als Relation) bitotal $\wedge$ eineind.

6.10. **Bsp.:**

Betr. Abb.:	$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$	$f(x)=x^2$
injektiv, nicht surj.:	$f(x)=e^x$	$f:\mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{R}$
surjektiv, nicht inj.:	$f(x)=x^3-x$	$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$
nicht inj., nicht surj.:	$f(x)=x^2$	$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
bijektiv:	$f(x)=x^3$	$f:\mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$

Komposition und Inverse von Abbildungen

6.11. **Def.:** Seien $f:X\to Y$ und $g:Y\to Z$ Abbildungen.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

Dann heißt $g\circ f: X\to Z$, $g\circ f(x) := g(f(x))$ die Komposition/Hintereinanderausführung von f und g.
Lies: "g nach f" für $g\circ f$, man beachte die Reihenfolge!
("g nach f" heißt: erst f, dann g anwenden...)

6.12. **Def.:** Auf jeder Menge X ($\neq\emptyset$) kann die Identität(sabb.) / identische Abb. definiert werden durch $id_X: X\to X$, $x\mapsto x$.

6.13. **Bem.:**
- Für jede Abb. $f: X\to Y$ gilt $id_Y\circ f = f$ und $f\circ id_X = f$.
  $\rightsquigarrow$ "neutrale" Abbildungen id_X, id_Y bzgl. $\circ$
- Klar gilt i.a. $f\circ g\neq g\circ f$, auch wenn $f,g: X\to X$, z.B. $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$, $g(x)=x+1$
  $\rightsquigarrow f(g(1)) = f(2) = 4 \neq 2 = g(1) = g(f(1))$.

6.14. **Def.:** Seien $f: X\to Y$ und $g: Y\to X$ Abbildungen zwischen Mengen X und Y.
Dann heißt g eine
- Rechtsinverse von f, falls $f\circ g = id_Y$
- Linksinverse von f, falls $g\circ f = id_X$
- Inverse von f, falls $g\circ f = id_X$ und $f\circ g = id_Y$, d.h. falls g sowohl Links- als auch Rechtsinverse von f ist.
  (Gelegentlich auch Umkehrabb. von f genannt.)

Wir zeigen, dass diese Begriffe eng mit obigen Abbildungstypen zusammenhängen.

6.15. Lemma A: Sei $f: X\to Y$ eine Abb. Dann sind äquivalent: (i) f ist injektiv
(ii) f hat eine Linksinverse

⌜Merkregel: **in**jektiv $\Leftrightarrow$ L**in**ksinverse⌟

<u>Beweis:</u> <u>Zu (i)⇒(ii):</u> Wähle $z \in X$ bel. Wir def. $g: Y \to X$ durch

$$g(y) := \begin{cases} x, & \text{falls } f(x)=y \text{ gilt,} \\ z, & \text{falls es kein } x \text{ mit } f(x)=y \text{ gibt.} \end{cases}$$

Da es zu jedem $y \in Y$ nach Annahme "injektiv" höchstens ein $x \in X$ mit $f(x)=y$ gibt, können wir g so definieren. Für ein bel. $x \in X$ gilt dann $g(f(x))=x$, also $g \circ f = id_X$.

<u>Zu (ii)⇒(i):</u> Sei g eine Linksinverse. Angenommen, $u, v \in X$ mit $u \neq v$. Dann gilt $g(f(u)) = u \neq v = g(f(v))$, also folgt $f(u) \neq f(v)$. Dies zeigt, dass f injektiv. □

Analog gilt (muss aber anders bewiesen werden):

6.16. <u>Lemma B:</u> Sei $f: X \to Y$ eine Abb. Dann sind äquivalent: (i) f ist surjektiv
(ii) f hat eine Rechtsinverse

⌜Merkregel: surjektiv ⟺ rechtsinverse⌟

<u>Beweis:</u> <u>Zu (i)⇒(ii):</u> Sei f surjektiv, zu jedem $y \in Y$ gibt es dann mind. ein $x \in X$ mit $f(x)=y$. Wir wählen zu jedem y ein solches x aus und setzen $g(y)=x$. Dann gilt nach Konstruktion $f(g(y)) = f(x) = y$, also ist g Rechtsinverse.

<u>Zu (ii)⇒(i):</u> Sei g eine Rechtsinverse. Für jedes $y \in Y$ gilt dann $f(g(y)) = f \circ g(y) = y$, also hat $g(y)$ als Bild (unter f) genau das Element y, d.h. y hat mind. ein Urbild. □

6.17. <u>Bem.:</u> Lemma B ist tiefer, als es aussieht: Zum Beweis von (i)⇒(ii) haben wir zu jedem $y \in Y$ ein Urbild "ausgewählt". Dass man das tun kann, ist nicht selbstverständlich, aber ein wichtiges Prinzip der Mengenlehre, nämlich das sogenannte "Auswahlaxiom" (tatsächlich ist Lemma B dazu äquivalent).

Wir fassen Lemma A und B zusammen:

6.18. <u>Lemma C:</u> Sei $f: X \to Y$ eine Abb. Wenn f eine Linksinverse $g: Y \to X$ und eine Rechtsinverse $h: Y \to X$ hat, dann ist $g = h$ und f ist bijektiv.

<u>Beweis:</u> Nach Voraussetzung gilt $f \circ h = id_Y$ und $g \circ f = id_X$, also folgt
$g(y) = g(f \circ h(y)) = g(f(h(y))) = g \circ f(h(y)) = h(y)$ für alle $y \in Y$. Also ist $g = h$. □

6.19 <u>Korollar:</u> Eine bijektive Abb. $f: X \to Y$ hat genau eine Inverse.

<u>Beweis:</u> Seien g und h Inverse von f. Dann ist insb. g Rechtsinverse von f und h Linksinverse von f, nach Lemma C folgt $g = h$. □

6.20 <u>Bsp.:</u> 1. $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ ist bij., die Inverse heißt $\log: \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ (Logarithmus),
es gilt $\exp(\log(x)) = x$ bzw. $\log(\exp(y)) = y$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$, $x > 0$.

2. $q: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto x^2$ ist bij., die Inverse heißt $\sqrt{}: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ (Wurzel),
d.h. $\sqrt{y}$ ist eine Zahl ≥ 0 mit $(\sqrt{y})^2 = q \circ \sqrt{}(y) = y = \sqrt{} \circ q(y) = \sqrt{y^2}$,
sofern $y \geq 0$ ist.

identifizieren $\sqrt{}$ mit $\tilde{\sqrt{}}$, wollen mal nicht so pingelig sein

3. $\tilde{q}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto x^2$ ist surj., die Rechtsinverse ist $\tilde{\sqrt{}}: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$, es gilt $\tilde{q} \circ \tilde{\sqrt{}}(y) = (\tilde{\sqrt{y}})^2 = y$.

4. $p_n: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto x^n$ ist bij., die Inverse ist (per Def.) die <u>n-te Wurzel</u> $\sqrt[n]{}$.

Besondere Abbildungen

Charakteristische Abbildungen

6.21 <u>Def.:</u> Ist X eine Menge und $A \subseteq X$, so def. wir eine zugehörige Abb. durch
$$\chi_A: X \to \{0,1\}, \quad \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A, \\ 0, & \text{falls } x \notin A. \end{cases}$$

Man nennt χ_A die <u>charakteristische Funktion</u> von A. Klar: $\chi_A = \chi_B \Leftrightarrow A = B$.

6.22 <u>Bem.:</u> Ist umgekehrt eine Abb. $f: X \to \{0,1\}$ geg., so ist $f = \chi_A$ mit
$A := \{x \in X \mid f(x) = 1\}$, d.h. jede 0-1-Abb. ist eine charakterische Fkt.

<u>Folgen</u>

6.23 <u>Def.:</u> • Eine Abb. $x: \mathbb{N} \to X$ in eine Menge X heißt <u>Folge</u> und wird als <u>$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$</u> geschrieben, d.h. schreiben x_n für $x(n)$.
• $\mathbb{N}$ heißt <u>Indexmenge</u> der Folge.

6.24 <u>Bem.:</u> • Für $X = \mathbb{R}$ hat man die in der Analysis gebräuchlichen reellen Zahlenfolgen, mit deren Hilfe man die Approximation an andere reelle Zahlen untersucht („Konvergenz").
• Natürlich können auch Folgen von Folgen etc. untersucht werden.
• Für Teilmengen $A \subseteq \mathbb{N}_0$ kann die zugehörige charakteristische Fkt. als zugehörige 0-1-Folge (d.h. Abb. $\mathbb{N}_0 \to \{0,1\}$) aufgefasst werden und umgekehrt.
• Für irgendeine Menge $I \neq \emptyset$ kann eine Abb. $x: I \to X$ in eine Menge X als <u>$(x_i)_{i \in I}$</u> geschrieben werden. Man nennt $(x_i)_{i \in I}$ eine <u>Familie</u>/<u>Tupel</u> mit Indexmenge I.

Abbildungen bei Quotientenmengen

6.25. Sei X eine nichtleere Menge und $\sim$ eine Ä-Relation. Die Quotientenmenge ist $X/\sim\; = \{[x] \mid x \in X\}$, die Menge der Ä-Klassen $[x] = \{y \in X \mid y \sim x\}$.
Es gibt immer eine „natürliche" Abb. $k: X \to X/\sim$
$x \mapsto [x]$, die jedem x ihre Klasse $[x]$ zuordnet, oft auch <u>Kanonische Abb.</u> genannt (sie ist übrigens surjektiv).

ein solches Schaubild heißt „kommutatives Diagramm"

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "k"'] & Y \\ X/\sim \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

falls $f = \tilde{f} \circ k$

Ist eine Abb. $f: X \to Y$ derart, <u>dass sie konstant auf den Klassen $[x]$ ist</u>, d.h. $\forall x \in X\ \forall y, z \in [x]: f(y) = f(z)$, dann gibt es eine Abb. $\tilde{f}: X/\sim\; \to Y$, die sich auf den $[x]$ wie f verhält („<u>von f induziert wird</u>"), d.h. für die $f = \hat{f} \circ k$ gilt: Es ist einfach $\hat{f}([x]) := f(x)$ erklärt. Diese Def. ist wohldefiniert (d.h. auch hier repräsentantenunabh.) nach <u>Vor.</u>

6.26. <u>Bsp.:</u> $X = \mathbb{Z}$, $m \sim n :\Leftrightarrow 4 \mid m-n$, $\mathbb{Z}/\sim\; = \{[0], [1], [2], [3]\}$. Die Abb. $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, $f(m) := i^m$ induziert $\hat{f}: \mathbb{Z}/\sim\; \to \mathbb{R}$, $\hat{f}([0]) = 1$, $\hat{f}([1]) = i$, $\hat{f}([2]) = -1$, $\hat{f}([3]) = -i$.
↑ vgl. L8

<u>Bijektive Abbildungen</u> setzen Def.- und Zielbereich in direkte Beziehung. Dann spielt die „Anzahl" der Elemente eine Rolle:

6.27. <u>Def.:</u> • Eine Menge X heißt <u>endlich</u>, wenn es eine nat. Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ und eine bijektive Abbildung $f: \{1, 2, \dots, n\} \to X$ gibt.
Dann gilt $X = \{f(1), f(2), \dots, f(n)\}$ und $f(i) \neq f(j)$ für $i \neq j$.
• Die Zahl n heißt dann <u>Kardinalität</u>/<u>Mächtigkeit</u>/<u>Länge</u> von X.
Notation: $\#X = n$ (oder $|X| = n$ oder $\mathrm{card}(X) = n$)
Wir sagen auch, n ist die <u>Anzahl</u> der Elemente von X.

6.28. <u>Bem.:</u> • Es gilt: $\#X = 0 \Leftrightarrow X = \emptyset$.
• Eine Menge X heißt <u>unendlich</u>, wenn sie nicht endlich ist, dies kann man symbolisch als $\#X = \infty$ schreiben.

6.29. <u>Satz:</u> (1) Sind X, Y endlich, $\#X \leq \#Y$ und $f: X \to Y$ surj., so ist f bijektiv.
(2) Sind X, Y endlich, $\#X \geq \#Y$ und $f: X \to Y$ inj., so ist f bijektiv.
<u>Bew.:</u> Ü

6.30. <u>Korollar:</u> Sind X, Y endlich, $\#X = \#Y$, $f: X \to Y$ eine Abb., so sind äquivalent:
(i) f ist bijektiv, (ii) f ist injektiv, (iii) f ist surjektiv.