

-1-

# INHALTSverzeichnis der Vorlesung Lineare Algebra I

SoSe'24 hhu  
K. Halupczok

## §1: Mathematische Grundbegriffe

### L1: Einführung

Definition, Aussage, Variablen, Satz/Theorem/Lemma/Proposition/Korollar,  
Def. Aussage, Aussagenform, Verknüpfungen  $\wedge \vee \neg$ , Wahrheitstafeln, Klammern

---

### L2: Logikregeln und Quantoren

Implikation  $\Rightarrow$ , Äquivalenz  $\Leftrightarrow$ , Logikregeln, direkter und  
indirekter Beweis, Prädikat, Quantoren  $\forall \exists$ , Verneinung/Umgang mit Quantoren

---

### L3: Elementare Mengenlehre und Beweise

Menge, Element,  $\emptyset$ , Mengeverknüpfungen  $\cap \cup \setminus$ , Mengenbeziehung  $\subseteq$ ,  
Formulieren von Sätzen/Beweisen, Beweise von Aussagen mit Quantoren

---

### L4: Praktische Tipps bei Beweisen

Voraussetzungen zusammenfassen, direkter und indirekter Beweis,  
Kontrapositionsbeweis, Widerspruchsbeweis, Beweistechniken, Widerlegen von  
(falschen) Aussagen, Vollständige Induktion

---

### L5: Relationen

Kartesisches Produkt, Relation, Eigenschaften von Relationen,  
Äquivalenzrelation und -klassen, Quotientenmenge, Beispiele, Def. Abbildung/Funktion

---

### L6: Abbildungen

Def. Abbildung, Bild und Urbild, surjektiv/injektiv/bijektiv,  
Komposition, Umkehrabb./inverse Abbildung, besondere Abbildungen, endliche Mengen

---

§2: Algebraische Grundbegriffe

L7: Gruppen, Ringe, Körper

Halbgruppe, Gruppe, Ring, Körper, Restklassenring  $\mathbb{Z}/M$ ,  
 $\mathbb{Z}/M$  Körper  $\Leftrightarrow M$  Primzahl, endliche Körper  $\mathbb{F}_p$ 

L8: Konkrete Gruppen, Ringe, Körper

Konstruktion der Zahlbereiche  $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$  mit  $\delta$ -Relationen,  
Komplexe Zahlen  $\mathbb{C}$ , Polynome, Polynomdivision, Nullstellenatspaltung§3: Vektorräume

L9: Vektorräume und Untervektorräume

Bezeichnungen, Vektorraum, Untervektorraum, Familien,  
 $\cap, \cup$  von Vektorräumen, Lineare Hülle  $L(S)$  für  $S \subseteq V$ , Erzeugendensystem

L10: Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit, LGS

Lineare Abh./Unabh., LGS, Lösungsmenge, homogenes/inhomogenes LGS,  
elementare (Zeilen) umformungen, nichttriv. Lösbarkeit: homogenes LGS, lin. (un-)abh.  
Vektorenmengen

L11: Basis und Dimension

Basis, Basissatz, Basisergänzungssatz, Austauschatz von Steinitz,  
Dimension, un-/endlichdimensionale VRe, Charakterisierung einer Basis

L12: Summen- und Quotientenvektorräume

Dimension von UVRen, Dimensionsformel, direkte Summe,  
Vektoren in direkten Summen, QuotientenVRe, Parameterdarstellung affiner Räume

## §4: Lineare Abbildungen und Matrizen

L13: Definition und Eigenschaften linearer Abbildungen

Lineare Abbildung, Isomorphie, Basen und lin. Abb.en, Kern, Bild,  $f$  inj.  $\Leftrightarrow \ker f = \{0\}$ , Rangsatz, Homomorphiesatz, jeder  $m$ -dim.  $K$ -VR ist isomorph zu  $K^m$

---

L14: Matrizenrechnung

Matrizenrechnung, spezielle Matrizen, lineare Abbildungen und Matrizen, Koordinatenvektor und kanonischer Isomorphismus, darstellende Matrix

---

L15: Matrixdarstellungen und  $\text{Hom}(U, W)$

Sylvester-Rangsatz,  $\text{Hom}(U, W) \cong K^{m \times n}$ ,  $\text{gof}(x)$  entspricht  $(B \cdot A) \cdot x$ . Assoziativität des Matrixprodukts,  $f^{-1}$  entspricht  $A^{-1}$ , Dualraum  $V^*$ , transponierte Abb.  $f^T$

---

L16: Matrixform eines LGS

LGS in Matrixform, Zeilenrang = Spaltenrang, Zeilenstufenform, LGS-Lösungskriterien, Gaußeliminationsverfahren, inverseltransponierte Matrix

---

L17: Basiswechsel

Basiswechsel, Matrixdarstellungen zu verschiedenen Basen, Basiswechselsatz, Spezialfälle, äquivalente und ähnliche Matrizen, Rang äquivalenter Matrizen

---

## §5: Endomorphismen

L18: Determinantenfunktionen

Determinantenfunktion, normierte Determinantenfunktion, Eindeutigkeit, Existenz durch Konstruktion, Det eines Endos von  $K^n$  bzw.  $V$

---

L19: Determinante einer Matrix

Determinante einer Matrix, Entwicklungssatz von Laplace, Streichungsmatrizen, vereinfachtes Gaußeliminationsverfahren, algebraisches Komplement, Cramersche Regel

---

-4-  
L20: Eigenwerte und Eigenvektoren

EWe, EVen, Spektrum, Lin. Unabh. von EVen zu versch. EVen, Diagonalisierbarkeit, charakteristisches Polynom, Spur, Eigenraum, Existenz von EVen

---

L21: Diagonalisierbarkeit, Trigonalisierbarkeit

Diagonalisierbarkeitskriterien mit Eigenräumen und  $\chi_A$  bzw.  $\chi_f$ , geometrische und algebraische Vielfachheit eines EWes, trigonalisierbar, Fahnenbasis

---

§6: Enklidische und unitäre Vektorräume

L22: Räume mit Skalarprodukt

Bilinearform, hermitesch/symmetrisch, Sesquilinearform, positiv (semi-)definit, Skalarprodukt, euklidischer/unitärer Raum, Standardskalarprodukt, Norm  $\|\cdot\|$ , Cauchy-Schwarz,  $\Delta$ -Ungl.

---

L23: Geometrie im  $\mathbb{R}^n$

senkrecht/orthogonal, elementargeom. Sätze, Winkelmessung, Kosinussatz, Drehmatrizen, Vektorprodukt, Orthonormalsystem, Orientierung eines ONS, Hesse-Normalform, Lot

---

L24: Orthonormalbasen

(B)O(N)S, O(N)B, Schmidt-Orthogonalisierung, orthogonales Komplement, Proximum, approximative Lösung eines unlösbaren LGS, adjungierte Matrix, Normalengl.

---

L25: Normale Endomorphismen

hermitesch adjungierter Homomorphismus, normal/unitär/orthogonal/selbstadjungiert/symmetrisch, Spalten einer unitären Matrix sind ONB, EVen zu versch. EVen eines normalen  $f$  sind orthogonal

---

L26: Hauptachsentransformation

Hauptachsentransformation für normale Endos/Matrizen, 1. Spezialfall: selbstadj., 2. Spezialfall: unitär/orthogonal, Isometrie, (reelle) Normalform für orthogonale Endos/Matrizen

---