

# Tutorium zur Linearen Algebra I, letzte Sitzung

## Aufgabe 5 (Probeklausur):

Sei  $f: V \rightarrow W$  eine lin. Abb. mit  $\text{Rg}(f) = \dim(W)$  und sei  $(v_1, \dots, v_m)$  eine Basis von  $V$ .

Zeigen Sie, dass dann  $(f(v_1), \dots, f(v_m))$  ein Erzeugendensystem von  $W$  ist.

Vor.:  $f: V \rightarrow W$  lin. Abb.,  $\text{Rg}(f) = \dim(W)$ ,  $(v_1, \dots, v_m)$  Basis von  $V$ .

Beh.:  $(f(v_1), \dots, f(v_m))$  ist EZ. system von  $W$ ,  
d.h. jedes  $w \in W$  ist LK des  $f(v_1), \dots, f(v_m)$ .

Bew.:

Sei  $w \in W$  bel. Da  $\text{Rg}(f) = \dim(W) \Rightarrow f$  surjektiv.  
 $= \dim(\text{im}(f)) \Rightarrow \text{im } f = W$

D.h. insb.  $\exists v \in V: f(v) = w$ .

Da  $(v_1, \dots, v_m)$  Basis, gilt  $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m: v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m$

Also

$$w = f(v) = f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m) = \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_m f(v_m),$$

$\uparrow$   
 $f \text{ lin.}$

d.h.  $w$  ist LK von  $f(v_1), \dots, f(v_m)$ . □

Erinnerung:  $\text{im}(f) = \{w \in W \mid \exists v \in V: f(v) = w\} \subseteq W$ ,  
ist UVR von  $W$ .

$f$  surjektiv:  $(\Leftrightarrow) \forall w \in W \exists v \in V: f(v) = w$

Aufgabe 4 (Probeklausur):

Vor.:  $U \subset \mathbb{R}^3$   $U := \{(x, y, z) \mid 3x - 4y = z\} \subseteq \mathbb{R}^3$ .

(i) Beh.:  $B = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right)$  ist Basis von  $U$ .

lin. unabh.  $\rightarrow$  erz.

Bew.:

•  $B$  erz.:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; 3x - 4y = z \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 3x - 4y \end{pmatrix} ; x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\stackrel{\leftarrow}{=} \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} ; x, y \in \mathbb{R} \right\} = L \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right).$$

•  $B$  lin. unabh.:  $\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{LGS}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 \\ 3 & -4 & | & 0 \end{pmatrix} \leftarrow 0 \cdot \lambda_1 + 1 \cdot \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$

$\leftarrow$  in Gs. III:

Also:  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ .

$3 \cdot \lambda_1 - 4 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$

□

$$x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 3x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+0 \\ 0+y \\ 3x-4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 3x-4y \end{pmatrix}$$

Isomorphiesatz:

$V/\ker f \cong \text{im}(f)$

$f: V \rightarrow \text{im}(f) = W$

lin. Abb., surj.

Sei  $U = \ker f$

$V/\ker f = V/U$

Bsp:  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

ELWe berechnen? ELVen / Eigenräume?

• ELWe berechnen:  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1,$

denn  $\chi_A(\tau)$

$$= \det \begin{pmatrix} 2-\tau & 1 & 2 \\ 0 & 1-\tau & 0 \\ 0 & 0 & 2-\tau \end{pmatrix} = (2-\tau)^{\overset{\text{alg. Vielf.}}{2}} \cdot (1-\tau)^{\overset{\text{alg. Vielf.}}{1}} \text{ hat die Null. } 2, 1.$$

geom. Vielf. sind die Dimension der Eigenräume

• ELVen / Eigenräume best.:

• Zu  $\lambda_1 = 2$ :

$$0 = A - 2 \cdot I_3 \Leftrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 2-2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1-2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-2 & 0 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} v_1 \text{ bel.} \\ v_3 = v_2 \end{array}$$

Gf. I:  $v_2 + 2v_3 = 0$   
 $\Leftrightarrow 3v_3 = 0$   
 $\Leftrightarrow v_3 = 0 = v_2$

Gf. II:  $-v_2 + v_3 = 0$   
 $\underline{v_3 = v_2}$

Dim Eigenraum =  $\dim \ker(A - 2 \cdot I_3) \stackrel{\text{Rangsatz}}{=} 3 - \text{Rg}(\dots) = 3 - 2 = \underline{1}$   
 $\uparrow$   
 $\dim V = \mathbb{R}^3$

Eigenvektor:  $\begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_1 \in \mathbb{R} \rightarrow \text{Eigenraum } E_2(A) = L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

• Zu  $\lambda_2 = 1$ :

$$0 = A - 1 \cdot I_3 \Leftrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 2-1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-1 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} v_1 = -v_2 \\ v_3 = 0 \end{array}$$

Dim Eigenraum = 1 (ebenso)

$\text{Rg}(\dots) = 2$

Eigenvektor:  $\begin{pmatrix} v_1 \\ -v_1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_1 \in \mathbb{R} \rightarrow \text{Eigenraum: } E_1(A) = L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$

$\Rightarrow A$  nicht diag'bar, da für  $\lambda_1 = 2$  ist alg. Vielf. = 2  $\neq$  1 = geom. Vielf.

$\Rightarrow A$  nicht diag'bar, da keine Basis aus ELVen vorliegt!

-4-

Bsp.:  $\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ ,  $\chi_{\hat{A}}(\tau) = \underline{\underline{(\tau-2)^2(\tau-1)}}$

ist nicht ähnlich  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{diag}(2, 2, 1)$

$A$  und  $\hat{A}$  sind ähnlich

Bsp.:  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \underline{\underline{\mathbb{F}_3}}^{3 \times 3}$

$\underline{\underline{\mathbb{F}_3}} = \{0, 1, 2\}$

Wieder  $\chi_A(\tau) = (2-\tau)^2(1-\tau) \leadsto \text{EWe: } \underline{\underline{1, 2}}$

Betr. EW  $\lambda=2$ :

Eben dazu:  $\sigma = A - 2 \cdot I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & \underline{\underline{-1}} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbb{F}_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{1 \cdot (-1)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\text{Rg} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{Rg} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1+2 & -2+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbb{F}_3} \text{Rg} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \text{Rg} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{1}}$

$-1+2=1,$   
 $-2+1=1+1=2$

$\dim E_2(A) = 3 - \text{Rg}(\sigma) = 3 - 1 = \underline{\underline{2}} = \text{a.S. Vielf.}$

Eigenvektoren:  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{+} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{matrix} 1 \cdot v_2 + 2v_3 = 0 \leadsto v_2 = -2v_3 \\ v_1 \text{ bel.} \end{matrix} \quad \begin{matrix} v_2 = v_3 \\ \text{in } \underline{\underline{\mathbb{F}_3}} \end{matrix}$

Sei  $v$  ein EV, dann  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \leadsto E_2(A) = \mathcal{L} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

-5-

Ergebnis:  $A \in \mathbb{H}_3^{3 \times 3}$  ist diag'bar,

d.h. ist ähnlich zu  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,

es gibt eine Basis aus EVen, nämlich  $\left( \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{zu } \lambda_1=2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{zu } \lambda_1=1} \right) = \mathcal{B}$ .

$$\begin{aligned} \left[ \begin{aligned} A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, & A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} &= 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ist 1. Spalte} & & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ist 2. Spalte} & & \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ist 3. Spalte} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$$\leadsto \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ist darst. Matrix bzgl. } \mathcal{B}$$

Anfrage: Zeigen Sie: Beh.: Eine  $n \times n$ -Matrix, in der alle Zeilensummen = 0 sind, hat den EW 0 zum EV  $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Bew.: Sei  $A = (\alpha_{ij}) \in \mathbb{R}$  0 eine Matrix,

d.h.  $\forall i \in \{1, \dots, n\}: \alpha_{i1} + \alpha_{i2} + \alpha_{i3} + \dots + \alpha_{in} = 0$ ,

$$\text{d.h. } \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} = 0.$$

Z.z.:  $A \cdot v = 0 \cdot v$ .

$$\text{Haben: } n \cdot 0 = 0 \cdot v = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- 6 -

Haben:  $\text{e. v.} = A \cdot v = (\alpha_{ij}) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \dots & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \alpha_{1j} \\ \sum_{j=1}^n \alpha_{2j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n \alpha_{mj} \end{pmatrix} \stackrel{\text{vor.}}{=} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ \vdots \\ 5 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = 5 \cdot v$$

✓  
□

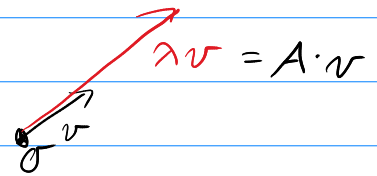
---

EW glg.:

$$A \cdot v = \lambda \cdot v$$

Def.:  $v \neq 0$  mit  $A \cdot v = \lambda v$  heißt EV  
zum EW  $\lambda$

bzw.  $f_A(v) = \lambda \cdot v$



zu  $A$  zugeh. lin. Abb.  $f_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$   
 $v \mapsto A \cdot v$