Tutorium zur Linearen Algebra I, zu L12 – L13

Konstruktion eines QuotientenVRs:

Geg. K-VR V, weiter geg. UVR $U \subseteq V$.

$$V/U := \{ \underbrace{a+U}_{\substack{\text{keine Vektoren } \in V, \\ \text{sondern Teilmengen von } V \rightsquigarrow \text{ affine URe}}} ; \; a \in V \}$$

Wenn $a \in U$, ist $a + U = \{ a + u ; u \in U \} \subseteq U$

$\left(a \in U, \; u \in U \Rightarrow a+u \in U \right)$

$\quad \supseteq U$,

$\ulcorner$ sei $u \in U$, schreibe $u = a + u'$ mit $u' = u - a \in U$

Also $u \in \underline{a+U}$ $\lrcorner$.

$$\boxed{\text{Also: } \underset{(\Leftrightarrow a \in U)}{a+U} = U = \underline{0+U}.}$$

Konkretes Bsp. für $\underline{V/U}$: Sei $V = \mathbb{R}^3$, $\underbrace{U = L\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)}$.

$\hookrightarrow$ Basis $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$

$V/U = \{ x + U ; x \in V \} \not\subseteq V$

Ergänze $\mathcal{B}$ zu Basis von V, etwa $\mathcal{C} = (e_2, e_3)$

$\rightsquigarrow \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ Basis ✓

Sei $W := L(\mathcal{C}) = L(e_2, e_3)$, ist KomplementärVR laut Vorl.,

d.h. $\underline{V = U \oplus W}$.

Anschaulich: • W ist Ebene, genauer: W ist die yz-Ebene.

• W ist 2-dim. UVR von V.

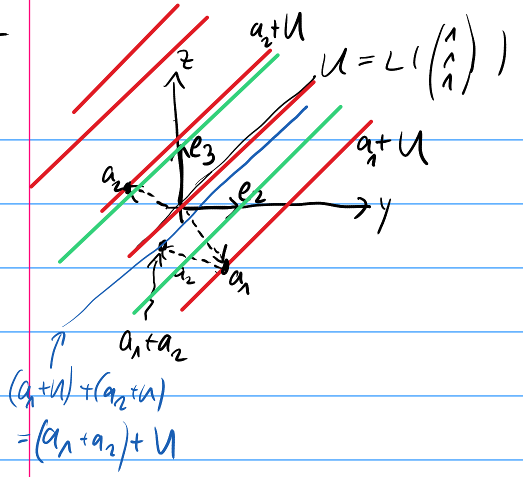
Laut Vorlesung:

$$\left.\begin{array}{l} e_2 \longmapsto e_2 + U \\ e_3 \longmapsto e_3 + U \end{array}\right\} \leftarrow \text{Basis von } V/U$$

$$\underset{\llcorner W \subseteq V,}{W} \cong \underset{\not\subseteq V}{\underline{V/U}}$$

$\dim V/U = 2$

$a \longmapsto a + U$



$W := L(e_2, e_3)$, ist Ebene, die yz-Ebene

1-dim. affine Räume

$V/U = \{a + U;\ a \in V\}$ $\leftarrow \dim V/U = 2$

$(a_1 + U) + (a_2 + U) := (a_1 + a_2) + U$

Haben gesehen: $(e_2 + U,\ e_3 + U)$ ist Basis von V/U

linear unabh., erzeugt V/U

Jedes $a + U \in V/U$ durchstößt Ebene $W = L(e_2, e_3)$ in einem Punkt x_0, d.h. $a + U = x_0 + U$.

Für jedes $a + U \in V/U$ ex. ein $x_0 \in W$ mit $a + U = x_0 + U$.

Dafür ist $x_0 = \alpha \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}_{e_2} + \beta \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}_{e_3}$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Also ist

$$\underbrace{a + U}_{\in V/U} = \alpha \cdot \underbrace{\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + U\right)}_{= e_2 + U} + \beta \cdot \underbrace{\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + U\right)}_{= e_3 + U}$$

$$\in L(e_2 + U,\ e_3 + U) \subseteq V/U.$$

Homom. satz: Sei V, W zwei K-VRe, $f: V \to W$ linear.

Dann: $V/\ker f \cong \operatorname{im} f$

Bew.:

Haben: $v \mapsto h(v) = v + \underbrace{\ker f}_{U} \in V/\ker f$, $U := \ker f$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & \operatorname{im} f \subseteq W \\ V/\ker f \arrow[ur, dashed, "\bar f"'] & \end{tikzcd}$$

Isom.

Haben $\bar f: V/\ker f \to \operatorname{im} f$

$v + \ker f \mapsto f(v)$

- $\bar f$ ist wohldef., d.h. repräsentantenunabh.

⌜ Ist $k(v) = v + \ker f = v' + \ker f = k(v')$, $v = v' + u$ mit $u \in \ker f$

z.z.: $\underbrace{f(v)}_{\downarrow \bar f} \overset{!}{=} \underbrace{f(v')}_{\downarrow \bar f}$.

Dann: $f(v) \overset{\uparrow}{=} f(v' + u)$
$\underset{f \text{ linear}}{=} f(v') + f(u) \overset{\uparrow}{=} f(v') + 0$
$= f(v')$. ⌟

- $f \overset{!}{=} \bar f \circ k$ ⌜ $\bar f \circ k(v) = \bar f(k(v)) = \bar f(v + \ker f) = f(v)$ ⌟

- $\bar f$ ist injektiv: z.z.: Sei $v + \underbrace{\ker f}_{U} \in \ker \bar f \subseteq V/U$,

d.h. $\bar f(v + \ker f) = 0_W$, dann ist auch $f(v) = \bar f(k(v))$
$= \bar f(v + \ker f) \overset{\uparrow}{=} 0_W$,

also $v \in \ker f$ und $v + \ker f = 0 + \ker f$.

Also: $\ker \bar f = \{0 + \ker f\}$, d.h. $\bar f$ ist injektiv.

- $\bar f$ ist surjektiv:

[Haben: $\bar f : V/\ker f \to \operatorname{im} f$
$v + \ker f \mapsto f(v)$]

Sei $w \in \operatorname{im} f$, etwa $w = f(v)$ für ein $v \in V$.
Dann ist

$$\bar f(\underbrace{v + \ker f}_{\uparrow}) = f(v) = w, \quad \text{also } w \in \operatorname{im} \bar f,$$

also ist $\bar f$ surjektiv.

das ist ein Urbild von w unter $\bar f$

□

Geg. Lin. Abb. $f: V \to W$, V, W beides K-VRe.

Was ist $\ker f$? $\ker f = f^{-1}(\{0_W\}) = \{v \in V;\ f(v) = 0_W\}$

Konkret: $V = L(1, T, T^2) \subseteq \mathbb{R}[T]$

$V = \{a_0 + a_1 T + a_2 T^2;\ a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$

$\dim V = 3$, da $(1, T, T^2)$ Basis von V.

$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$

Sei $f: \underset{\mathbb{R}\text{-VR}}{V} \to \underset{\mathbb{R}\text{-VR}}{\mathbb{C}}$, $\quad 1 \mapsto 1+i$

$T \mapsto i-1$

$T^2 \mapsto 2i$

$a_0 + a_1 T + a_2 T^2 = p \longmapsto a_0(1+i) + a_1(i-1) + a_2 \cdot 2i = f(v)$

Bsp.: $1 - T^2 \longmapsto (1+i) - 2i$

Rangsatz: $\dim \ker f + \dim \operatorname{im} f = \dim V$

Hier: $1 + \dim \operatorname{im} f = 3$

$\Rightarrow \dim \operatorname{im} f = 2$

$\Rightarrow \operatorname{im} f = \mathbb{C} \Rightarrow f$ surj.

Was ist $\ker f$? $\ker f = \{p \in V;\ f(p) = 0_{\mathbb{C}}\}$

$= \{a_0 + a_1 T + a_2 T^2;\ \underbrace{a_0(1+i) + a_1(i-1) + a_2 \cdot 2i}_{=(a_0 - a_1) + i\cdot(a_0 + a_1 + 2a_2)} \overset{!}{=} 0\}$

Realteil: $a_0 - a_1 = 0 \Rightarrow a_0 = a_1 = \lambda$

Imag. teil: $a_0 + a_1 + 2a_2 = 0 \Rightarrow 2a_2 = -a_0 - a_1 = -2\lambda$

$\Rightarrow a_2 = -\lambda$

Also: $\ker f = \{\lambda + \lambda T - \lambda T^2;\ \lambda \in \mathbb{R}\}$

$= L(\underbrace{(1 + T - T^2)}_{\text{ist Basis mit Kardinalität } 1})$

$\Rightarrow \dim \ker f = 1$

Neues Bsp.:

Wie oben sei $V = \underbrace{L(1, T, T^2)}_{} \subseteq \mathbb{R}[T]$.

betr. jetzt

$f: V \to \mathbb{R}^2$, $\quad 1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$T \mapsto \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$T^2 \mapsto \begin{pmatrix} a^2 \\ b^2 \end{pmatrix}$, $\quad \boxed{a \neq b}$

Ist das ein Isom.?

Zielraum: $\mathbb{R}^2$ $\quad$ Bild von f: $\mathrm{im} f = L\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a^2 \\ b^2 \end{pmatrix}}_{\text{3 Vektoren im } \mathbb{R}^2}\right)$

sind lin. abh.

$\mathrm{im} f \subseteq \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow \dim \mathrm{im} f \leq 2$

- Für $a \neq b$ ist $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right)$ lin. unabh.,

d.h. $L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a^2 \\ b^2 \end{pmatrix}\right)$ hat Dim. 2.

$\Rightarrow \dim \mathrm{im} f = 2$.

$\dim \ker f \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Rangsatz}}}{=} \dim V - \dim \mathrm{im} f = 3 - 2 = 1$,

d.h. $\ker f \neq \{0\} \Rightarrow f$ nicht injektiv.

- Für $a = b$? Dann $\mathrm{im} f = L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \rightsquigarrow \dim \mathrm{im} f = 1$

$\Rightarrow \dim \ker f = 3 - 1 = 2$

$\Rightarrow f$ nicht inj.

<u>Kein Iso!</u>