

Tutorium zur Linearen Algebra I

Zu L14/L15: Matrixdarst. / Matrixmult.

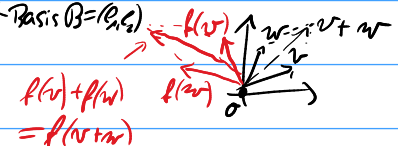
1. Bsp.: $V = \mathbb{R}^2$, Drehung um 90° des $\mathbb{R}^2 = V$? $\rightarrow$ Drehzentrum = 0

Beobachtung: ist lin. Abb., $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

(e1) $f(v+w) = f(v) + f(w)$ gilt, ✓

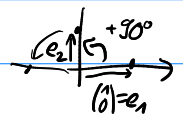
(e2) $f(\alpha v) = \alpha f(v)$ gilt, ✓

$\uparrow$ Basis $B = (e_1, e_2)$



Matrix A aufstellen:

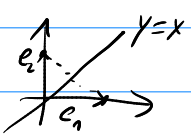
Haben $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, denn $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,
 $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.



2. Bsp.: $V = \mathbb{R}^2$, Spiegelung an $y=x$: $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

Matrix A aufstellen: Haben $h(e_1) = e_2$, $h(e_2) = e_1$,
 also

$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.



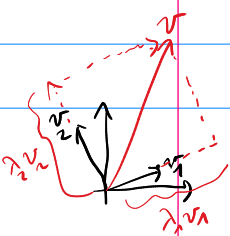
3. Bsp.: $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-2y \\ y \\ -3x \end{pmatrix}$, ist linear ✓

Matrix: $G = (g(e_1); g(e_2)) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$

denn $g(e_1) = g\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $g(e_2) = g\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Koordinatenvektoren: Im VR $V = \mathbb{R}^2$ betr. Basis $B = (v_1, v_2)$
 mit $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Vorl.: Basis $B = (v_1, \dots, v_n)$, $V \ni v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$, dann $K_B(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$.



Aufg.: Stelle $v = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit Koo. bzgl. B dar!

Gesucht: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 - \lambda_2 = 4 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 = -2 \end{cases}$$

$$\sim \text{LGS: } \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{1 \cdot (-2)} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ 0 & -7 & 8 \end{array} \right] \xrightarrow{(-1)} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -8/7 \end{array} \right] +$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 20/7 \\ 0 & 1 & -8/7 \end{array} \right] \xrightarrow{1:2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 10/7 \\ 0 & 1 & -8/7 \end{array} \right] \leftarrow \lambda_1$$

$$\text{Somit: } K_B(v) = K_B \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10/7 \\ -8/7 \end{pmatrix} = {}_B[v]$$

Wie oben: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-2y \\ -y \\ -3x \end{pmatrix}$

Wähle Basen: $B = (v_1, v_2)$ des $\mathbb{R}^2$, $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$
 $\mathcal{C} = (w_1, w_2, w_3)$ des $\mathbb{R}^3$, $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Matrixdarst. von f bzgl. $B, \mathcal{C}$?

$$f(v_1) = f \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2 \cdot 1 \\ -1 \\ -3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{LGS}} \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \leadsto \lambda_1 = \dots \text{ s.u.}$$

$$f(v_2) = f \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-2 \cdot 3 \\ -3 \\ -3 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{LGS}} \lambda_1' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \leadsto$$

$$\text{LGS jeweils: } \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 & -6 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{(-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & -10 \end{array} \right] \xrightarrow{1:3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -10/3 \end{array} \right] \xrightarrow{1:(-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -10/3 \end{array} \right] +$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -11/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -10/3 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{zweite n.f.}}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = K_{\mathcal{C}}(f(v_1)), \quad \begin{pmatrix} \lambda_1' \\ \lambda_2' \\ \lambda_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11/3 \\ 3 \\ -10/3 \end{pmatrix} = K_{\mathcal{C}}(f(v_2))$$

$$\text{Ergebnis: } [f]_{\mathcal{C}B} = \begin{bmatrix} -2 & -11/3 \\ 1 & 3 \\ 2 & -10/3 \end{bmatrix}$$

Bsp. für $f(v)$ darstellen in Ko., wenn $v = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}$

Haben ${}_B[v] = {}_B K(v) = \begin{pmatrix} 33/4 \\ -4/4 \end{pmatrix}$

• $f(v) = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 30 \end{pmatrix} = \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{LGS}} {}_E K(f(v)) = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22/3 \\ 3 \\ 34/3 \end{pmatrix}$

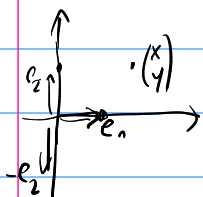
• $[f(v)] = \underbrace{{}_E[f]}_{\text{Matrix}} \cdot \underbrace{{}_B[v]}_{\text{Koovektor}} = \begin{bmatrix} -2 & -11/3 \\ 1 & 3 \\ 2 & -10/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 33/4 \\ -4/4 \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} -22/3 \\ 3 \\ 34/3 \end{pmatrix}$

Aus Vorl.: ${}_E K(f(v)) = {}_E [f(v)]$

Noch ein Bsp.: Drehung um 90° , $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot x = A \cdot x$
 und 2. Bsp.: Spiegelung an $y=x$, $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $h(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot x = B \cdot x$

Hinterinanderausführung:

• erst Dreh, dann Sp: $h \circ g(x) = K(g(x))$, Matrix?



$\underline{B \cdot A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Hinterans. = Spiegelung an der x-Achse
 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$

$\log \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \log \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
 $= \log(e_1), \log(e_2)$
 $= e_1, -e_2$

• erst Sp., dann Dreh: $g \circ h(x) = g(h(x))$, Matrix?

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Hinterans. = Sp. an der y-Achse

$g \circ h(e_1) = -e_1, g \circ h(e_2) = e_2$

-4-

Haben: Drehung um 90° in $\mathbb{R}^2$? Ist $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, beschrieben durch
 $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, g(x) = A \cdot x$

Was ist die Umkehrabb. von g ? $\rightarrow g(e_1) = e_2, g(e_2) = -e_1$
 $\rightarrow g^{-1}(e_2) = e_1, g^{-1}(\underline{e_1}) = -e_2$

Ist g^{-1} , hier anschaulich/geometrisch? Drehung um -90° ,

$$\text{Drehmatrix ist } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = A^{-1},$$

ist die Inverse Matrix von $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\text{d.h. } A \cdot A^{-1} = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{denn } g \circ g^{-1} = \text{id}_{\mathbb{R}^2} = g^{-1} \circ g$$

Bei Spiegelung: $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, h(x) = B \cdot x, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Inverse? $B^{-1} = B$, da $B \cdot B = I_2$. Also ist B bzw. h selbstinvers.

$$\leadsto h^{-1} = h.$$

Zu Aufg. 3 (ii): Var.: $V \in \mathcal{R}, U, W \subseteq V, U \subseteq W$
 $\leadsto U \subseteq W \subseteq V$

$\leadsto$ Kreist V/U und W/U

Sei $f: V \rightarrow (V/U) / (W/U), v \mapsto (v+U) + W/U$.

Beh.: $\ker f \stackrel{!}{=} W$, d.h. $\subseteq, \supseteq$ separat z.z. $\in V/U$

1. Haben: " $\supseteq$ ", da $\underline{w} \in W$, z.z.: $f(\underline{w}) = \underline{0}_{(V/U)/(W/U)}$,

$$\text{da } v \in W \leadsto v+u \in W/U$$

$$\text{denn } \underline{f(v)} = (v+u) + W/U \xrightarrow{\downarrow} \in W/U + W/U = W/U,$$

$$\text{d.h. } f(v) = (0+u) + W/U = \underline{0_{(v+u)/(w+u)}}.$$

2. Haben „ $\subseteq$ “, denn ist ein $v \in \ker f$, folgt $v \in W$,

$$\text{denn } \underline{f(v)} \xrightarrow{\downarrow} \underline{0_{(v+u)/(w+u)}} = \underline{0_{v+u}} + W/U$$

$$= \underline{(v+u) + W/U} = \underline{(0+u)}$$

$$\Rightarrow \underline{(v+u) - (0+u)} \in W/U$$

$$\underline{= (v-0) + u = v+u}$$

$$\Rightarrow v+u \in W/U \Rightarrow v \in W. \quad \square$$

$$\left[\begin{array}{l} \uparrow \\ v+u = w+u \\ \Rightarrow v+m_1 = w+m_2 \\ \Rightarrow v = \underbrace{w}_{\in W} + \underbrace{(m_2-m_1)}_{\in U \subseteq W} \in W \end{array} \right]$$