

Tutorium zur Linearen Algebra I

Noch zu L13: Isomorphiesatz

Aussage ist:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & \text{im}(f) \subseteq W \\ \tilde{f} \circ \pi & = & f \\ \pi \downarrow & \tilde{f} \cdot \cong & \text{Isomorphismus} \end{array}$$

$$V/\ker f$$

$$V/\ker f \cong \text{im } f$$

Sei $U := \ker f$,

ist UVR in V , und $\tilde{f}: V/U \rightarrow W$

$$v+U \mapsto f(v).$$

Bsp.: Sei $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$.

Erinnerung: hatten $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $h\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$,

Drehung um -90° , denn $h(e_1) = h\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$h(e_2) = h\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -e_1$$



Interpretation für f : projiziere auf xy -Ebene,
dann um -90° drehen

Isom. Satz: $V/\ker f \cong \text{im } f = \mathbb{R}^2$,

denn $\bullet \text{im}(f) = \mathbb{R}^2$, surjektiv. Ja: $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ hat Urbild $\begin{pmatrix} -n \\ m \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$$

$$\text{denn } f\left(\begin{pmatrix} -n \\ m \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} m \\ -(-n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \checkmark$$

• Bestimme $\ker(f)$:

$$\ker f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; y=0=x \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}; z \in \mathbb{R} \right\} = L\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = L(e_3)$$

Isom. Satz $\sim \tilde{f}: V/U \rightarrow W = \mathbb{R}^2$ Isom.

Haben Quot.raum: $V/\ker f = \underline{V/U} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + U; x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + L\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right); x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + L\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right); x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

haben $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \in L\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = U$, also

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + L\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + L\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$\rightarrow$ Haben $V/\ker f = V/U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + U; x, y \in \mathbb{R} \right\}$,

Basis davon ist: $\left(\underbrace{e_1 + U}_{=\tilde{e}_1}, \underbrace{e_2 + U}_{=\tilde{e}_2} \right) = \tilde{B}$

Erzeugend: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + U = x \cdot (e_1 + U) + y \cdot (e_2 + U)$ ✓

Haben: $\tilde{f}: V/U \rightarrow W$

$v + U \mapsto f(v)$

Wollen Matrixdarst. von $\tilde{f}$ bzgl. $\tilde{B}$, $\mathcal{C}$, wo $\mathcal{C} = (e_1, e_2) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$, diese ist

$${}_{\mathcal{C}}[\tilde{f}]_{\tilde{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{f}(\tilde{e}_1) = \tilde{f}(e_1 + U) = f(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{f}(\tilde{e}_2) = \tilde{f}(e_2 + U) = f(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Fazit: $\tilde{f}$ beschreibt, was f auf der xy -Ebene macht

↳ diese Ebene wird mit V/U identifiziert:
 $V/U \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $\tilde{e}_1 \mapsto e_1$
 $\tilde{e}_2 \mapsto e_2$

-3-

zu L16:

1. Bsp. inverse Matrix berechnen: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
(mit Zeilenumformung)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{1:5} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{1:11}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/11 & 5/11 \end{array} \right] \xrightarrow{1:(-5)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/5 & 0 & -1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/11 & 5/11 \end{array} \right] \xrightarrow{1:5}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2/11 & 1/11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/11 & 5/11 \end{array} \right] \xrightarrow{1:(-2)}$$

$$\frac{1}{5 \cdot 11} - \frac{1}{5} = \frac{1 - 11}{5 \cdot 11} = \frac{-10}{11 \cdot 5} = -\frac{2}{11}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 4/11 & -2/11 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2/11 & 1/11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/11 & 5/11 \end{array} \right] \xrightarrow{1:(-4)}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2/11 & 1/11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/11 & 5/11 \end{array} \right]$$

$$\leadsto A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2/11 & 1/11 \\ 0 & 1/11 & 5/11 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{11} \cdot \begin{bmatrix} 11 & 0 & -22 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Bsp.: Rangbestimmung mit Gaußelim., wo Spalten- und Zeilenumf. mögl.:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{1:2} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{1:2} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{1:2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{1:2} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5/2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{rg } A = 3$$

Bsp: $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{+ \\ \uparrow \cdot (-\frac{1}{2})}} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{vertausche} \\ \uparrow}} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{+} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leadsto \text{rg } B = 2$

ist Spaltenstufenform

Frage: Wie erkennt man, ob eine quadratische Matrix invertierbar ist?
 $\rightarrow$ am vollen Rang!

$\leadsto$ bzw. falls die zugeh. lin. Abb. ein Isom. / bij. / inj. / surj. ist,
 bzw. falls die Matrix eine links- bzw. Rechtsinverse hat.

Bsp.: Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, sei $B = \frac{1}{11} \cdot \begin{bmatrix} 11 & 0 & -22 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$.

Zeige, dass $B = A^{-1}$ ist.

Bew.: $\underbrace{A \cdot B}_{\uparrow B \text{ ist rechtsinvers}} = I_3$, d.h. B ist laut Vorl. die Inverse von A .

⚠ Dies gilt nur für quadratische Matrizen!

Bsp.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$

Beh.: $\exists B: B \cdot A = I_2$ mit $B \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$,

Bew.: Sei $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, dann $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

Aber: A ist nicht inv'bar! Denn

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq I_3$

Dies ist falsch ↓

→ $\triangle$ Fehlerquelle LGS: $\overset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \cdot x = b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, Angenommen, dies sei lösbar, und x sei Lösung.

→ $\underline{x} = \overset{\uparrow}{I_2} \cdot x \stackrel{\downarrow}{=} (B \cdot A) \cdot x \stackrel{\downarrow}{=} B \cdot (A \cdot x) \stackrel{\downarrow}{=} B \cdot b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 19 \end{pmatrix}$

ASSOZ. ✓

Aber: $\begin{pmatrix} 14 \\ 19 \end{pmatrix}$ ist keine Lösung von $Ax=b$! ↑

↳ denn $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 19 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Übungen zum Rangablesen:

1. Bsp.:

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \leftarrow$ Dann ist $\text{rg } A = 2$,
denn Sp. sind lin. unabh.
Format 4×2

2. Bsp.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leadsto \text{rg } A = 2$

3. Bsp.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leadsto \text{rg } A = 4$

Frage: Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, berechne $A^3 - 3A^2$
und verwende dies zur Berechnung von A^{-1} .

Hier ist $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2 \cdot A = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$,

denn ist $\underline{A^3 - 3A^2} = 4 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \overset{\uparrow}{=} (-4) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{-4 \cdot I_2}$

$\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 12 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 12 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

Haben

$$\underline{A^3 - 3A^2 = -4 \cdot I_2}$$

$$\Leftrightarrow A \cdot (A^2 - 3 \cdot A) = \underline{-4 I_2}$$

$$\stackrel{1: (-4)}{=} A \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{4}\right) \cdot (A^2 - 3 \cdot A)}_{=: B} = I_2,$$

also ist $B = A^{-1}$, da A quadratisch.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \underset{\uparrow}{\frac{1}{2 \cdot 2 - 1 \cdot 0}} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$