

# Tutorium zur Linearen Algebra I

Zu LM  $\leftarrow$  Basiswechsel

1.) "kleines" BWbeispiel:  $f: \underset{\hat{B}}{\mathbb{R}^2} \rightarrow \underset{\hat{B}}{\mathbb{R}^2}, \quad f\left(\underset{\hat{B}}{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}\right) = \begin{pmatrix} x-2y \\ -3x+6y \end{pmatrix}$

$$f\left(\underset{\hat{B}}{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}\right) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}}_{= {}_{\mathcal{E}}[f]_{\mathcal{E}}} \cdot \underset{\hat{B}}{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = A$$

wobei  $\mathcal{E} = (e_1, e_2) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ .

•  $f$  darstellen bzgl.  $\mathcal{B}, \mathcal{B}$  mit  $\mathcal{B} = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{v_2}\right)$ :

BW Matrix aufstellen:  $S = {}_{\mathcal{E}}[\text{id}]_{\mathcal{B}}$

Haben BWSatz:  ${}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}} = \underbrace{{}_{\mathcal{B}}[\text{id}]_{\mathcal{E}}}_{= S^{-1}} \cdot {}_{\mathcal{E}}[f]_{\mathcal{E}} \cdot \underbrace{{}_{\mathcal{E}}[\text{id}]_{\mathcal{B}}}_{= S} = \underset{\uparrow}{S^{-1}} \cdot \underset{\uparrow}{A} \cdot \underset{\uparrow}{S}$

• Hier:  $\underset{\uparrow}{{}_{\mathcal{E}}[\text{id}]_{\mathcal{B}}} = \underset{\uparrow}{\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}} = S$ .

denn  $\text{id}(v_1) = v_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \underset{\uparrow}{6} \cdot \underset{\uparrow}{e_1} + \underset{\uparrow}{7} \cdot \underset{\uparrow}{e_2}$

$\text{id}(v_2) = v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = (-1) \cdot e_1 + 2 \cdot e_2$

• Inverse von  $S^{-1}$  ausrechnen:

$$\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{6 \cdot 2 + 7 \cdot (-1)} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -7 & 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{19} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}$$

• Ergebnis:  ${}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}} = S^{-1} \cdot A \cdot S = \frac{1}{19} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -7 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{19} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -7 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -8 & -5 \\ 24 & 15 \end{bmatrix} = \frac{1}{19} \cdot \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 200 & 125 \end{bmatrix}$$

- 2 -

$v$   
↓

Bsp.:  $f\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 - 2 \cdot 4 \\ -3 \cdot 3 + 6 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 15 \end{pmatrix} = w$

Dieser Vektor wird bzgl.  $B$  dargestellt als

•  $K_B \begin{pmatrix} -5 \\ 15 \end{pmatrix} = \underset{=w}{B} \left[ \begin{pmatrix} -5 \\ 15 \end{pmatrix} \right] \overset{\text{laut Vorl.}}{=} [v_1 | v_2]^T \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 15 \end{pmatrix} = S^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 15 \end{pmatrix} = \frac{1}{19} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -7 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 15 \end{pmatrix}$   
 $\underset{=w}{B} [w] = \underset{B[id]_E}{B} [id]_E \cdot \underset{E[w]}{E} [w]$   
 $= \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 5 \\ 125 \end{pmatrix}$

bw. •  $\underset{\uparrow}{B} [f] \underset{\uparrow}{B} \underset{\uparrow}{B} \left[ \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{19} \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 200 & 125 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{19} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{19^2} \cdot \begin{pmatrix} 19 \cdot 5 \\ 19 \cdot 125 \end{pmatrix} = \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 5 \\ 125 \end{pmatrix}$

haben  $K_B = B \left[ \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right] = B[id]_E \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = S^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$   
 $= \frac{1}{19} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -7 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{19} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}$

Koo-Umrechnen:  $B[v] = S^{-1} \cdot v$ ,  $S = (v_1 | \dots | v_m)$ ,  
 wenn  $B = (v_1, \dots, v_m)$

Matrix darst. eines Endomorphismus bzgl. gewählter Basis  $B \subseteq V$ :

$v \mapsto f(v) = w$

$f: V \longrightarrow V$   
 $(v_1, \dots, v_n) = B$   
 $K_B \downarrow \cong$   
 $E \hookrightarrow K^n \xrightarrow{\quad} K^n \hookrightarrow E$   
 $x \mapsto A \cdot x$   
 $K_B(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$   
 $f(v) = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$   
 $K_B(f(v)) = K_B(w)$   
 $= A \cdot K_B(v)$

-3-

2.) BWbeispiel:  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$   $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$   
 $\mathcal{B}, \mathcal{B}' \quad \mathcal{E}, \mathcal{E}'$

$$\mathcal{E}'[f]_{\mathcal{B}'} = \underbrace{\mathcal{E}'[id]_{\mathbb{R}^2}}_{R = \text{BWmatrix}} \cdot \mathcal{E}[f]_{\mathcal{B}} \cdot \underbrace{\mathcal{B}[id]_{\mathcal{B}}}_{\text{BWmatrix} = S}$$

Seien  $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ ,  $\mathcal{B}' = (v'_1, v'_2, v'_3) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

• BWmatrix  $\mathcal{B}'[id_{\mathbb{R}^3}]_{\mathcal{B}}$  ausrechnen:

$$id_{\mathbb{R}^3}(v'_1) = v'_1 = \underbrace{0}_{\uparrow} \cdot v_1 + \underbrace{1}_{\uparrow} \cdot v_2 + \underbrace{0}_{\uparrow} \cdot v_3$$

$$\text{hier: } \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$id_{\mathbb{R}^3}(v'_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$id_{\mathbb{R}^3}(v'_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Also: } \mathcal{B}'[id_{\mathbb{R}^3}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Sei  $\mathcal{E} = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{w_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{w_2}\right)$ ,  $\mathcal{E}' = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{w'_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{w'_2}\right)$ .

• BWmatrix  $\mathcal{E}'[id_{\mathbb{R}^2}]_{\mathcal{E}}$  ausrechnen:

$$id_{\mathbb{R}^2}(w_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{4} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \underline{(-1)} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$id_{\mathbb{R}^2}(w_2) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{(-3)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{w'_1} + \underline{2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{w'_2}$$

$$\leadsto \mathcal{E}'[id_{\mathbb{R}^2}]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

-4-

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Jetzt: 
$$e' [f]_{\mathcal{B}'} = e' [id_{\mathbb{R}^2}]_e \underbrace{e [f]_{\mathcal{B}}}_{=: A} e [id_{\mathbb{R}^3}]_{\mathcal{B}'}$$

Bestimmung von A:

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\frac{2}{5}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \underline{\frac{1}{5}} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\frac{-2}{5}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \underline{\frac{4}{5}} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Basis} \\ \mathcal{B}}}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\frac{1}{5}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{w_1} + \underline{\frac{-2}{5}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{w_2}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2/5 & -2/5 & 1/5 \\ 1/5 & 4/5 & -2/5 \end{bmatrix} = e [f]_{\mathcal{B}}$$

Produkt: 
$$e' [f]_{\mathcal{B}'} = e' [id_{\mathbb{R}^2}]_e \underbrace{e [f]_{\mathcal{B}}}_A e [id_{\mathbb{R}^3}]_{\mathcal{B}'}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2/5 & -2/5 & 1/5 \\ 1/5 & 4/5 & -2/5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -20 & 5 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}}}$$

Probe: 
$$f\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{w_1'}\right) = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} -4 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{w_1'} + 2 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{w_2'} \quad \checkmark$$

$$f\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{w_2'}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$$f\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{w_3'}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

Koo-Umrechnen:

Sei  $v \in K^m$ . Haben:  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^m v_i e_i = v_1 e_1 + \dots + v_m e_m$

Wähle Basis  $B$  des  $K^m$ , etwa  $B = (v_1, v_2, \dots, v_m)$ .

Dann:  $K_B(v) = {}_B[v] = \underbrace{S^{-1}}_{\text{wobei}} \cdot v$ ,  
 $S = [v_1 | v_2 | \dots | v_m]$ .

Denn:  $v = \varepsilon[v] = \underbrace{\varepsilon[id]_B}_{\substack{= S \\ \uparrow}} \cdot \underbrace{{}_B[v]}_{\uparrow}$ ,  
 also  ${}_B[v] = S^{-1} \cdot v$ .  
 Dabei ist  $\underbrace{\varepsilon[id]_B}_{\uparrow} = [\underline{v_1} | \underline{v_2} | \dots | \underline{v_m}]$ ,  
 denn  $\text{id}(v_i) = v_i = \begin{pmatrix} v_{i1} \\ \vdots \\ v_{im} \end{pmatrix} = \underbrace{v_{i1}}_{\uparrow} \cdot \underbrace{e_1}_{\downarrow} + \dots + \underbrace{v_{im}}_{\uparrow} \cdot \underbrace{e_m}_{\downarrow}$ .

Bsp.:  $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$

Haben  ${}_B[v] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$   
 $= \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 - 2 \cdot 3 \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}}}$

Also:  $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_v = \underbrace{\begin{pmatrix} -3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}}_{\uparrow} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{v_1} + \underbrace{\frac{4}{5}}_{\uparrow} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{v_2}$  ✓