

Tutorium zur Linearen Algebra I

Zu L20/L21:

$$A \in K^{n \times n} \rightarrow \chi_A(T) = \det(A - T \cdot I_n)$$

$$f \in \text{End}(V) \rightarrow \chi_f(T) = \det(f - T \cdot \text{id}_V)$$

Zu $f \in \text{End}(V)$ ex. eine Matrixdarst. $A = [f]_{\mathcal{B}}$ nach Wahl einer Basis $\mathcal{B}$
 $\uparrow$
 Spalten sind Bilder $f(e_i)$ der $e_i \in \mathcal{B} = (e_i)$

$\rightarrow$ Def. von $\chi_f(T)$ ist $\chi_f(T) := \chi_A(T)$, wo A irgendeine Matrix ist, die f darstellt.

z. B. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ ist ähnlich $B = \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 200 & 125 \end{pmatrix}$.

$$f_A: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Haben $\chi_A(T) = \det \begin{pmatrix} 1-T & -2 \\ -3 & 6-T \end{pmatrix} = (1-T) \cdot (6-T) - (-3) \cdot (-2)$
 $= \underline{\underline{6-T-6T+T^2-6}} = T^2 - 7T$

und $\chi_B(T) = \det \begin{pmatrix} \frac{8}{19} - T & \frac{5}{19} \\ \frac{200}{19} & \frac{125}{19} - T \end{pmatrix} = \left(\frac{8}{19} - T\right) \left(\frac{125}{19} - T\right) - \frac{5 \cdot 200}{19^2}$

$$= \frac{8}{19} \cdot \frac{125}{19} - \frac{8}{19} T - \frac{125}{19} T + T^2 - \frac{5 \cdot 200}{19^2} = T^2 - 7T$$

$$\hookrightarrow \text{NR: } \frac{8}{19} + \frac{125}{19} = \frac{133}{19} = 7$$

Zur Bestimmung der EWe berechne die Nullstellen von $T^2 - 7T$
 $= T \cdot (T - 7)$

Diese sind $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 7$.

-7-

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$.

Bestimmung der EVen von A : die $v \in \mathbb{R}^2$ mit $A \cdot v = \lambda \cdot v$

Zu $\lambda_1 = 0$: Da $A - 0 \cdot I_2 = A$

best. $v \in \mathbb{R}^2$ mit $A \cdot v = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Löse dieses LGS: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{+3 \cdot \text{I}_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2y$

Haben $L\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ als Lösungsmenge.
Nimm $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, ist EV zu $\lambda_1 = 0$.

Zu $\lambda_2 = 7$: Da $A - 7 \cdot I_2 = \begin{pmatrix} 1-7 & -2 \\ -3 & 6-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

best. $v \in \mathbb{R}^2$ mit $(A - 7 \cdot I_2) \cdot v = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Löse dieses LGS: $\left(\begin{array}{cc|c} -6 & -2 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{+2 \cdot \text{I}_2} \left(\begin{array}{cc|c} -6 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{y: (-1)} \begin{cases} -6x - 2y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow 3x + y = 0 \Rightarrow y = -3x$

Lösungsmenge: $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2; y = -3x \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -3x \end{pmatrix}; x \in \mathbb{R} \right\} = L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}\right)$

Haben: $\rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, ist EV zu $\lambda_2 = 7$

$(A - \lambda I_2)v = 0$

$\Leftrightarrow Av - \lambda v = 0 \Leftrightarrow Av = \lambda v$

$\leadsto$ geom.: $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ wird auf $0 \cdot v_1 = 0$ abgebildet, da $A \cdot v_1 = 0$

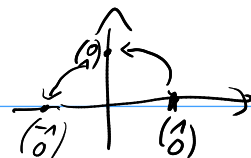
$\cdot v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ wird auf $7 \cdot v_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ -21 \end{pmatrix}$ abgebildet, da $Av_2 = 7 \cdot v_2$

Frage: Gibt es line Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, die keine EWe hat?

$\chi_A(T) = T^2 + 1$ hat keine Nst. Haben $\det\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A=} - T \cdot I_2\right) = \det \begin{pmatrix} -T & -1 \\ 1 & -T \end{pmatrix} = T^2 + 1$
hat keine reellen Nst., keine EWe

-3-

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ haben } A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



A ist geom. eine Drehung um 90°

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}, \quad \chi_A(T) = T^2 + 1 = (T - i) \cdot (T + i)$$

$$T^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow T^2 = -1 \Leftrightarrow T_1 = i \vee T_2 = -i$$

Haben EWe: $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$.

Bestimmung der EVen:

Zu $\lambda_1 = i$: $A - \lambda_1 \cdot I_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - i \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$

$\leadsto$ LGS: $\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
 $\swarrow i, (-i) \cdot i = 1$

Gaußelim.: $\left(\begin{array}{cc|c} -i & -1 & 0 \\ 1 & -i & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{i} \left(\begin{array}{cc|c} -i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \begin{matrix} -ix - y = 0 \\ y = -ix \end{matrix}$

Lösung: $L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}\right)$, wo $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$.

Γ Polarkoo.:
 $re^{i\varphi} \cdot i = re^{i\varphi} \cdot e^{i\pi/2} = re^{i(\varphi + \pi/2)}$

Zu $\lambda_2 = -i$: $A - \lambda_2 I_2 = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$

$\leadsto$ LGS: $\begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leadsto 1 \cdot x + iy = 0 \Rightarrow x = -iy$

$\leadsto$ Lösung: $L\left(\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, wo $v_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$

Haben Basis $\mathcal{B} = (v_1, v_2) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ aus EVen. $\leadsto$ Diagonalmatrix $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$

Haben: A ist ähnlich zu $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, denn

$\bullet A \cdot v_1 = i \cdot v_1 = i \cdot v_1 + 0 \cdot v_2$

$\bullet A \cdot v_2 = -i \cdot v_2 = 0 \cdot v_1 + (-i) \cdot v_2$

-4-

Was ist ein Fixpunkt von $f: V \rightarrow V$, f linear?

Antwort: Ein $v \in V$ mit $f(v) = v$.

Das ist ein EV zum EW $\lambda = 1$, da $f(v) = 1 \cdot v$,
oder der Vektor $v = 0$.

Zu L18/L19:

det-Fkt. $\nearrow$ det von A, von f

Zu L18: Determinantenfunktion:

$\Delta: (K^m)^m \rightarrow K$, die j -te Komp.

(D1): n -multilinear: $\forall j: 1) \Delta(\dots, \lambda x, \dots) = \lambda \Delta(\dots, x, \dots)$

2) $\Delta(\dots, x + \tilde{x}, \dots) = \Delta(\dots, x, \dots) + \Delta(\dots, \tilde{x}, \dots)$

(D2): alternierend $\rightarrow (x_1, \dots, x_m)$ lin. abh. $\Rightarrow \Delta(x_1, \dots, x_m) = 0$

(D3): normiert $\rightarrow \Delta(e_1, \dots, e_m) = 1$

Satz: $\exists!$ Det.-Fkt. mit (D1), (D2), (D3)!

$\hookrightarrow$ Det einer Matrix,

Entw. nach Zeile $i \in \{1, \dots, m\}$:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^m (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

Haben $\det(A) = \det(A^T)$

$\rightarrow$ Entw. nach Spalte $j \in \{1, \dots, m\}$:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^m (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

Bsp:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} = (-1)^{3+2} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= - (1 \cdot 4 - 2 \cdot 2) = 0 \quad (\Rightarrow \text{nicht inv'bar})$$

Hat $\text{rg } A = 2$, da $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ lin. unabh.

$(\Rightarrow) \text{rg}(A) < 3$

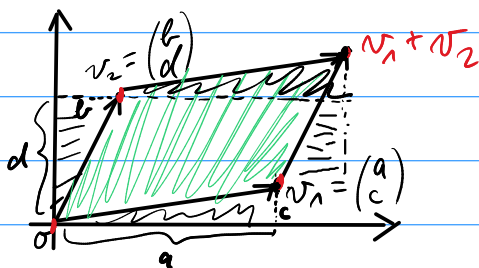
$\hookrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ lin. abh.

Det. fkt. für $n=2$: $\Delta: (\mathbb{R}^2)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ bilinear, alt., normiert.

Bsp.: $\Delta: (\mathbb{R}^2)^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\Delta(v_1, v_2) = \Delta\left(\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}\right) = ad - cb,$$

Beh.: $|ad - bc|$ ist der Flächeninhalt des des Parallelogramms,
das von v_1, v_2 aufgespannt wird.



$$\{v \in \mathbb{R}^2; v = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2, 0 \leq \mu_1, \mu_2 \leq 1\}$$

$$\text{Flächeninhalt} = ad - cb$$

Satz: $|\det(v_1, \dots, v_n)|$ ist ^{Volumen} Flächeninhalt des aufgespannten "n-Spat"
 $|\Delta(v_1, \dots, v_n)|$

Beweis: • Zeige, dass ^{Volumen} Flächeninhalt $\{v \in \mathbb{R}^n; v = \sum_{i=1}^n \mu_i v_i, 0 \leq \mu_1, \dots, \mu_n \leq 1\}$
n-linear, alternierend, normiert,

Ex. $\mathbb{R}^n$ End.
für det-Fkt.

$$\text{Flächeninhalt} = |\det|.$$

$$\text{Fläche} (e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$$

(D2)-Fläche additiv:

$$\Delta(v_1 + v'_1, v_2) = \Delta(v_1, v_2) + \Delta(v'_1, v_2) \quad \checkmark \text{ (nachzurechnen)}$$

□