Tutorium Lineare Algebra I

Log. Verknüpfungen zweier Aussagen A und B:

$$A \wedge B, \quad A \vee B, \quad A \Rightarrow B, \quad A \Leftrightarrow B$$

Mit einer Aussage: $\neg A$

$$A \Rightarrow B \overset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} \neg A \vee B$$

$$\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee B) \Leftrightarrow \neg(\neg A) \wedge (\neg B)$$

$$\Leftrightarrow A \wedge \neg B$$

Bsp.: A: x ist gerade (x nat. Zahl)

B: $x > 10$

$A \wedge B \Leftrightarrow x$ ist gerade $\wedge\ x > 10$

Bsp.: $x = 6$: $\underbrace{6 \text{ ist gerade}}_{w} \wedge \underbrace{6 > 10}_{f}$ f

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f ←

$x = 14$: $\underbrace{14 \text{ ist gerade}}_{w} \wedge \underbrace{14 > 10}_{w}$ w

$A \wedge B$ ist wahr genau für $x = 12, 14, 16, \ldots$ ← Aufzählung

bzw. $x = 12 \vee x = 14 \vee x = 16 \vee \ldots$

für $x = 2k,\ k \geq 6,\ k \in \mathbb{N}$

$A \vee B \Leftrightarrow x$ ist gerade $\vee\ x > 10$

$\Leftrightarrow x = 2, 4, 6, 8, 10, 11, 12, 13, \ldots$

$x = 1, 2, 3, \ldots, 10, 11, 13, 15, \ldots \Leftrightarrow \underline{x < 11} \vee \underbrace{x \text{ ungerade}}$

w für $x = 11$

$x = 2, 3, 5, 7, 11 \iff x$ ist Primzahl $\wedge\ x \leq 11$

A: x ist gerade, B: $x > 10$

$\forall x: A \Rightarrow B$?f.! $x = 2$ ist gerade, aber $2 > 10$ falsch

$\neg(A \Rightarrow B)$ ist z.B. wahr für $x = 2$

$$\begin{aligned}
\neg(A \Rightarrow B) &\iff A \wedge \neg B \\
&\iff x \text{ ist gerade} \wedge \neg(x > 10) \\
&\iff x \text{ ist gerade} \wedge (x \leq 10) \\
&\iff x \text{ ist gerade} \wedge (x < 10 \vee x = 10) \\
&\iff x = 2, 4, 6, 8, 10 \\
&\iff x = 2 \vee x = 4 \vee x = 6 \vee x = 8 \vee x = 10
\end{aligned}$$

$\neg(x > 10) \iff x \leq 10 \iff 10 \geq x$

"kleiner oder gleich"

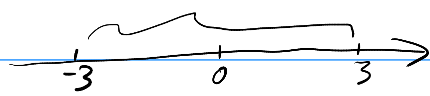
$\neg(x < 10) \iff x \geq 10 \iff 10 \leq x$

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

$x \in \mathbb{R}$

z.B. $|-3| = 3$, $|3| = 3$

$|x| < 3 \iff -3 < x < 3$



$\iff -3 < x \wedge x < 3$

Welche $x \in \mathbb{R}$ erfüllen $|2x-1| > 3$?

$$|2x-1| > 3 \iff \neg(|2x-1| \le 3)$$

$$\iff \neg(-3 \le 2x-1 \wedge 2x-1 \le 3)$$

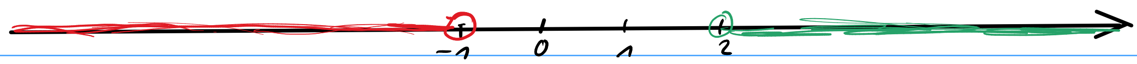
$$\iff (-3 > 2x-1) \vee (2x-1 > 3)$$

$$\iff -2 > 2x \quad \vee \quad 2x > 4$$

$|:2$

$$\iff -1 > x \quad \vee \quad x > 2$$

$$\iff x < -1 \quad \vee \quad x > 2$$



$|2x-3| > 3$

1. Fall: $2x-3 \ge 0 \wedge 2x-3 > 3 \iff 2x-3 > 3$

$\vee$ 2. Fall: $2x-3 < 0 \wedge \underbrace{-(2x-3) > 3}_{2x-3 < -3} \iff 2x-3 < -3$

D.h.: $2x-3 > 3 \vee 2x-3 < -3$

Quantoren: $\forall$, $\exists$

"für alle" "es gibt" / "es existiert"

- Math. Bsp.: $\forall x \in \mathbb{R}: \quad x^2 \geq 1 \Rightarrow x \geq 1$ f.

Gegenbsp.: $x = -3: \quad \underbrace{\underbrace{(-3)^2}_{=9} \geq 1}_{w} \Rightarrow \underbrace{-3 \geq 1}_{f}$ f.

belegt $\neg\left(\forall x \in \mathbb{R}: \quad \underline{x^2 \geq 1 \Rightarrow x \geq 1}\right)$

$\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}: \neg(\underbrace{x^2 \geq 1}_{A} \Rightarrow \underbrace{x \geq 1}_{B})$

$\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}: \quad \underline{x^2 \geq 1} \wedge \underline{x < 1}$,

ist wahr,

z.B. mit $x = -3$

$\neg(A \Rightarrow B)$
$\Leftrightarrow$
$A \wedge \neg B$

- Math. Bsp.: $\forall x \in \mathbb{R}: \quad \underbrace{x^2 = 1 \Rightarrow x = 1}_{\text{wahr für}}$ f

$x = 2: \quad \underline{x^2 = 4 \Rightarrow x = 2}$ w

falsch für $x = -1: \quad (-1)^2 = 1 \wedge x \neq 1$

- Math. Bsp.: $\forall x \in \mathbb{R}: \quad x^2 = 1 \Leftrightarrow |x| = 1 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$

Denn:

$x^2 = 1 \Leftrightarrow \underline{x^2 - 1} = 0 \overset{\text{3 bin. Formel}}{\Leftrightarrow} (x+1)(x-1) = 0$

$\Leftrightarrow x + 1 = 0 \vee x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$

Man darf verwenden:

Satz vom Nullprodukt: $\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad \underline{x \cdot y = 0} \Leftrightarrow \underline{x = 0 \vee y = 0}$

Quantoren:

$\neg(A \Rightarrow C) \Leftrightarrow A \wedge \neg C$

$\neg(\neg A \vee C)$

$\Leftrightarrow A \wedge \neg C$

(1) Hunde, die bellen, beißen nicht.

A: Hund bellt, B: Hund beißt

$\forall$ Hunde: $A \Rightarrow \neg B$

Logisches Gegenteil von (1): $\exists$ Hunde: $\neg(A \Rightarrow \neg B)$

$\Leftrightarrow$ $\exists$ Hunde: $A \wedge \neg(\neg B)$

$\Leftrightarrow$ $\exists$ Hunde: $A \wedge B$

(2) Nachts sind alle Katzen grau.

$\forall$ Katzen: nachts $\Rightarrow$ Katze grau

Logisches Gegenteil von (2): $\exists$ Katze: nachts $\wedge$ Katze nicht grau

(3) Für jeden Topf gibt es den passenden Deckel:

$\forall A \; \exists B : P(A,B)$

$P(A,B)$: Deckel B passt auf Topf A

Logisches Gegenteil von (3): $\Leftrightarrow$ $\exists A \; \neg(\exists B : P(A,B))$

$\Leftrightarrow$ $\exists A \; \forall B : \neg P(A,B)$

Es gibt einen Topf, für den alle Deckel nicht passen.

Bsp.:

Alle Positive Differenzen zweier Quadratzahlen sind Produkt zweier nat. Zahlen, die >1 ist.

$n \in \mathbb{N}$ heißt Quadratzahl, falls $\exists x \in \mathbb{N} : x^2 = n$

$x^2 = x \cdot x$

Versuch:

$\forall n > m, \quad \exists x, y : \quad n = x^2, \; m = y^2$

$\Rightarrow (\exists a, b > 1 \quad : \quad a \cdot b = n - m)$

einfacher: $\forall x, y \in \mathbb{N}, \; x > y : \; \exists a, b \in \mathbb{N}, \; a, b > 1 : \; a \cdot b = x^2 - y^2$

Wahr oder falsch?

Ist falsch!

$\forall x, y \in \mathbb{N}, \; x > y : \qquad x^2 - y^2 = (x+y) \cdot (x-y),$

d.h. die Aussage ist wahr mit $a = x + y \geq 1 + 1 = 2 > 1$

und $b = x - y \overset{?}{\geq} 1,$

[denn $x - y > 0,$

d.h. $\underbrace{x - y}_{\in \mathbb{N}} \geq 1$ da $x, y \in \mathbb{N}$]

Aber $x - y = 1$ geht nicht, weil

sonst $y = x - 1 \rightsquigarrow x^2 - y^2 = x^2 - (x-1)^2$

$= x^2 - x^2 + 2x - 1$

$= 2x - 1$

$x = 2, \; y = 1$:

$x^2 - y^2 = 4 - 1 = 3$ ist nicht als

$a \cdot b, \; a, b > 1,$ schreibbar.