

Tutorium zur Linearen Algebra I

zu L20/L21:

$f \in \text{End}(V)$, A eine darstellende Matrix, $n = \dim(V)$

Wdh.: f diag'bar $\Leftrightarrow \exists$ Basis aus EVen

$\Rightarrow$ Summe der Eigenraumdimensionen ist n

$\Rightarrow \chi_f(T) = \det(A - T \cdot I_n)$

$$= (-1)^n (T - \lambda_1)^{r_1} \dots (T - \lambda_k)^{r_k}$$

r_i heißen algebraische Vielfachheiten

$$\dim E_{\lambda_i} = \dim V - \text{rg}(A - \lambda_i I_n)$$

$\uparrow$
Rangsatz

und $\forall i \leq k: \dim E_{\lambda_i} = r_i$
heißt geometrische Vielfachheiten

$\bullet \exists$ in verschiedene EW $\Rightarrow f$ diag'bar

$$Av = \lambda v \Leftrightarrow (A - \lambda I) \cdot v = 0 \text{ mit } v \neq 0$$

$$\Rightarrow \det(A - \lambda I) = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 = \lambda v - Av$$

$$\Leftrightarrow 0 = (\lambda \cdot I - A)v$$

$$\Leftrightarrow \det(\lambda \cdot I - A) = 0$$

$$\chi_f(T) = \det(A - T \cdot I_n)$$

$$= \underbrace{(-1)^n}_{\text{Vorfaktor}} T^n - \underbrace{(-1)^n \text{Spur}(A)}_{\text{Spur}(A)} T^{n-1} + \dots + \det A$$

$\uparrow$
Vorfaktor

$$\tilde{\chi}_f(T) = \det(T \cdot I_n - A)$$

$$= T^n - \text{Spur}(A) T^{n-1} + \dots + (-1)^n \det A$$

$\uparrow$
normiert

E_λ ist Eigenraum von $f \in \text{End}(V)$,

falls λ EW von f ist und $E_\lambda := \{v \in V; \underline{Av = \lambda v}\}$

Wegen $Av = \lambda v \Leftrightarrow (A - \lambda I)v = 0 \Leftrightarrow v \in \ker(A - \lambda I_n)$
ist

$$E_\lambda = \underline{\ker(A - \lambda I_n)}$$

$$\dim E_\lambda = \dim \ker(A - \lambda I_n) \underset{\text{Rangsatz}}{=} n - \text{rg}(A - \lambda I_n)$$

$\uparrow$
Rangsatz

Heben: $\dim E_\lambda \geq 1$, da sonst $E_\lambda = \{0\}$, d.h. dann ist λ kein EW.

$$f_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto A \cdot x$$

1. Bsp: EWe/EVen von $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ über $K = \mathbb{R}$.

$$\text{Char. Pol. ist } \chi_A(T) = \det \begin{pmatrix} 2-T & -1 \\ 1 & 4-T \end{pmatrix} = (2-T)(4-T) - 1 \cdot (-1) \\ = T^2 - 6T + 9 = (T-3)^2$$

alg. Vielfachheit
des EWs $\lambda = 3$

Geom. Vielfachheit von $\lambda = 3$:

$$\dim E_\lambda = \dim E_3 = 1 \neq 2 = \text{alg. Vielfachheit} \Rightarrow \text{nicht diag'bar}$$

Nur Möglich: $\begin{pmatrix} 3 & * \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ nicht diag'bar! , $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ diag'bar unmöglich

$$\text{Geom. Vielfachheit ist } = \underbrace{2}_{=2} - \text{rg} \begin{pmatrix} 2-3 & -1 \\ 1 & 4-3 \end{pmatrix} = 2 - \underbrace{\text{rg} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=1} = 1 \quad \checkmark$$

Ergebnis: A ist nicht diag'bar, insb. nicht ähnlich zu $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$!

• EVen bestimmen: $Av = \lambda v$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} v = 3v \quad (\Rightarrow) \quad \begin{pmatrix} 2-3 & -1 \\ 1 & 4-3 \end{pmatrix} v = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} v = 0 \quad (\Rightarrow) \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \\ v_1 + v_2 = 0 \Leftrightarrow v_1 = -v_2 = v_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow v \in L\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\text{Also: } E_3 = L\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

-3-

$$A_1 \cdot e_1 = 1 \cdot e_1 \quad \checkmark \Rightarrow \lambda_1 = 1 \text{ EW}$$

2. Bsp.: $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ über $K = \mathbb{C}$:

$$\chi_{A_1}(T) = \det \begin{pmatrix} \boxed{1-T} & -2 & 1 \\ 0 & 1-T & 3 \\ 0 & -1 & -2-T \end{pmatrix} = \underbrace{(1-T)}_{\uparrow} \cdot \det \begin{pmatrix} 1-T & 3 \\ -1 & -2-T \end{pmatrix}$$

$$= (1-T) \cdot (T^2 + T + 1)$$

$$= (1-T) \cdot \left(T + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \cdot \left(T + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

NR: $T^2 + T + 1 = 0$

pq-Formel: $T_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1-4}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3}$

$$\lambda_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$\rightarrow 3$ versch. EW $\Rightarrow A_1$ diag'bar,

d.h. A_1 ist ähnlich zu $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{pmatrix}$.

EWen berechnen zu $\lambda = 1$: $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 3 & | & 0 \\ 0 & -1 & -3 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow v_3 = 0$
 $\hookrightarrow v_2 = 0, v_1 \text{ bel.}$

$$\Rightarrow L\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{= e_1}\right) = E_1(A_1).$$

3. Bsp.: Kästchenmatrix

$$\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & A_1 \end{array}\right) = A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ 1 & 4 & & & \\ \hline 1 & -2 & 1 & & \\ 0 & 1 & 3 & & \\ 0 & -1 & -2 & & \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$$

$$\mathbb{R}^5 \cong \underbrace{\mathbb{R}^2}_{U_1} \oplus \underbrace{\mathbb{R}^3}_{U_2} \rightarrow A \text{ ist invariant auf } U_1, U_2$$

Char. Pol. $\chi_{A_2}(T) = \det(A - T \cdot I_2) \cdot \det(A_1 - T \cdot I_3)$

Mult. Satz für det

$$= \chi_A(T) \cdot \chi_{A_1}(T)$$

$\rightarrow$ nicht diag'bar

1. Bsp.

2. Bsp.

$\hookrightarrow$ wissen nicht, ob diag'bar

- 4 -

Also laut obigem: $\chi_{A_2}(T) = (T-3)^2 \cdot (T-1) \cdot (T^2+T+1)$

Haben $E_3(A_2) = L\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, $E_1(A_2) = L\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

A_2 nicht diag'bar, da Untermatrix A nicht diag'bar
bzw. $\dim E_3(A_2) = 1 \neq 2 = \text{alg. Vielfachheit von } \lambda=3$

4. Bsp.: $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ ist ähnlich zu $D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3} & \\ & & -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$

Welches $S \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ergibt

$S^{-1} A_1 S = D$

$S = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} - \frac{4}{6}i\sqrt{3} & -\frac{3}{2} + \frac{4}{6}i\sqrt{3} \\ 0 & -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3} & -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

zu $\lambda=1$ zu $\lambda_1 = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$ zu $\lambda_2 = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3} = \overline{\lambda_1}$

da $S e_i = v_i$

Haben: $S^{-1} A_1 (S e_i) = S^{-1} A_1 v_i = S^{-1} \cdot \lambda_i v_i = \lambda_i S^{-1} v_i = \lambda_i e_i$ ✓

$= 0 \cdot e_1 + \dots + 0 \cdot e_n + \lambda_i e_i + 0 \cdot e_{i+1} + \dots + 0 \cdot e_n$

$\leadsto \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} = D$

5. Bem.: Vor.: $A \in \underline{\mathbb{R}}^{n \times n}$, EW $\lambda_{1,2} = a \pm ib \in \mathbb{C}$,

v sei EV von A zu λ_1 , etwa $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$.

Beh.: $\bar{v} := \begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \vdots \\ \bar{v}_n \end{pmatrix}$ ist EV von A zu $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$.

Bew.: $A \cdot \bar{v} = \overline{A \cdot v} = \overline{A \cdot v} = \overline{\lambda_1 \cdot v} = \overline{\lambda_1} \cdot \bar{v} = \lambda_2 \cdot \bar{v}$
 $\uparrow$
 $v \text{ ist EV zu } \lambda_1$

$$\Rightarrow A \bar{v} = \lambda_2 \bar{v} \quad \square$$

6. Bem.: f inv'bar, v ein EV $\Rightarrow v$ EV von f^{-1} zum EW $\frac{1}{\lambda}$.
 $(\Leftrightarrow f \text{ bijektiv})$

Bew.: Sei λ der zugeh. EW,

$$\text{d.h. } f(v) = \lambda v \Rightarrow \underbrace{f^{-1}(f(v))}_{f^{-1}(\lambda v)} = \underbrace{f^{-1}(\lambda v)}_{f^{-1}(\lambda v)}$$

$$\Rightarrow v = \lambda f^{-1}(v), \text{ da } f^{-1} \text{ linear}$$

$\because \lambda \neq 0, \text{ da } f \text{ inv'bar}$

$$\Rightarrow \underbrace{f^{-1}(v)}_{\uparrow} = \underbrace{\frac{1}{\lambda} v}_{\uparrow}$$

$\square$

$$\boxed{f^{-1}(\lambda v) = \lambda f^{-1}(v)}$$

Vor.: $f \in \text{End}(V)$, V endl. dim.

Beh.: Sei λ EW von f , f bijektiv $\Rightarrow \lambda \neq 0$. $(\Leftrightarrow B \Rightarrow \underline{A})$

Bew.: f bijektiv $(\Leftrightarrow f$ injektiv $(\Leftrightarrow \ker f \stackrel{B}{=} \{0\})$

$$(\Leftrightarrow \ker(f - \overset{=0}{0} \cdot \text{id}_V) = \{0\},$$

D.h. Sonst: $\lambda = 0 \Rightarrow \exists v \neq 0: f(v) = 0 \cdot v = 0 = \ker(f - 0 \cdot \text{id}_V) \neq \{0\}$

Insb.: A inv'bar $\Rightarrow 0$ kein EW !

$\Rightarrow \ker(f) \neq \{0\} \Rightarrow f$ nicht bij.,
 $\uparrow$
 $v \in \ker(f), v \neq 0$ $\square$