Tutorium zur Linearen Algebra I

Zu L3/L4
Mengen Beweise

Bsp. für Mengen:

$A := \{3, 4, 6\}$, $B := \{1, 6, 4, 5, 1, 4\} = \{1, 4, 5, 6\}$

$A \cap B = \{4, 6\}$, $A \cup B = \{3, 4, 6, 1, 4, 5, 6\}$

$A \setminus B = \{3\}$, $B \setminus A = \{1, 5\}$.

Wie viele El. hat die Menge $\{\{6,7,8\}, \{1,3\}\}$? Zwei!

Aufgabe: Sei $U = \{1, 2, 3\}$, $V = \{2, 4\}$.

$U \in V$ f.	$\{2\} \in V$ f.	$2, 4 \in V$ w.	$V = \{2, 4, 2, 2\}$ w.
$3 \notin U$ f.	$1 \in V$ f.	$U = V$ f.	$V \ni 2$ w.
$x \in U \wedge x \in V \Rightarrow x = 2$ d.h. $x \in U \cap V$ w.	$U \subseteq V$ f.	$\{2, 3\} \subseteq U$ w.	$\{2, \{2, 3\}\} \subseteq U$ f.
$U \cap V = 3$ f.	$2 \subseteq U$ f. Zahl, keine Menge	$\{2\} \subseteq U$ w. $A \subseteq B$ $:\Leftrightarrow_{\text{Def.}} \forall x \in A: x \in B$ hier: $x = 2$: $x \in U$ wahr	$V \setminus U = \{4\}$ w.
$U \cup V \ni 4$ w.	$U \cup V \supseteq 4$ f	$U \cup V \supseteq \{4\}$ w.	$U \neq V$ w.
$\emptyset \in U$ f.	$\emptyset \subseteq U$ w.	$V \supseteq \emptyset$ w.	$U \setminus V = \{1, 3\}$ w.

$U = \{1, 2, 3\}$, $V = \{2, 4\}$.

Bsp. für Aussondern:

$$G = \{x \in \mathbb{N};\ \underline{x \text{ gerade}}\} = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$$

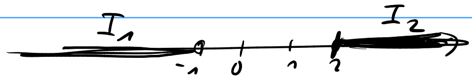
$$= \{x \in \mathbb{N};\ \underline{\exists y \in \mathbb{N} : x = 2y}\} = \{2y;\ y \in \mathbb{N}\}.$$

$$U = \{x \in \mathbb{N};\ x \text{ ungerade}\} = \{2y-1;\ y \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N} \setminus G$$

$$G \cap U = \emptyset, \qquad G \cup U = \mathbb{N}$$

$$I = \{x \in \mathbb{R};\ |2x-1| > 3\} \overset{\text{s. Tut L1/L2}}{=} \{x \in \mathbb{R};\ x < -1 \vee x > 2\}$$

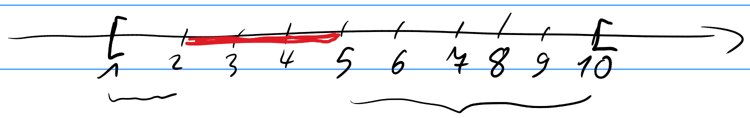
$$= \underline{]-\infty, -1[} \cup \underline{]2, \infty[}$$



$]a,b[:= \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}$	$[a,b] := \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}$
$]-\infty, b[:= \{x \in \mathbb{R};\ x < b\}$	$]-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R};\ x \leq b\}$
$]b, \infty[:= \{x \in \mathbb{R};\ x > b\}$	$[b, \infty[:= \{x \in \mathbb{R};\ x \geq b\}$
	$[a,b[:= \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x < b\}$

Bsp.:
- $1 \in [1,2[$ w., • $2 \in [1,2[$ f.
- $5 \in \underbrace{[1,7[}_{5\in} \cap \underbrace{]3,5]}_{5\in} \Leftrightarrow \underbrace{\underbrace{5 \in [1,7[}_{w} \wedge \underbrace{5 \in]3,5]}_{w}}_{w}$
- $\underbrace{[1,10[}_{} \setminus \underbrace{]2,5]}_{2\notin\ 5\notin} = [1,2] \cup]5,10[\quad \not\ni 5$

  d.h. $\underline{1 \leq x \leq 2} \vee \underline{5 < x < 10}$



$l.S. = \{x \in [1,10[\,;\ x \notin]2,5]\} = \{x \in \mathbb{R};\ 1 \leq x \wedge x < 10 \wedge \neg(2 < x \leq 5)\}$

$= \{x \in \mathbb{R};\ 1 \leq x < 10 \wedge \neg(2 < x \wedge x \leq 5)\}$

$= \{x \in \mathbb{R};\ 1 \leq x < 10 \wedge (2 \geq x \vee x > 5)\}$

$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow A \wedge B \vee A \wedge C$

$= \{x \in \mathbb{R};\ 1 \leq x \leq 2 \quad \vee \quad 5 < x < 10\}$

$= \{x \in \mathbb{R};\ 1 \leq x \leq 2\} \cup \{x \in \mathbb{R};\ 5 < x < 10\} = [1,2] \cup]5,10[.$

Def.: U, V heißen <u>disjunkt</u>, falls $U \cap V = \emptyset$

Def.: A, B, C heißen <u>disjunkt</u>, falls A, B disjunkt $\wedge$ A, C disjunkt $\wedge$ B, C disjunkt — paarweise disjunkt

Beh.: A, B, C $\overset{\text{p.w.}}{\text{disjunkt}} \Rightarrow A \cap B \cap C = \emptyset$ ✓

$\not\Leftarrow$

Bsp.: Schnittleer: $\underbrace{(\{1,2\} \cap \{2,3\})}_{\{2\}} \cap \{4,5\} = \emptyset$

Aber: $\{1,2\} \cap \{2,3\} = \{2\} \neq \emptyset$

Bsp.: $(\underbrace{[1,4] \cap [3,5]}) \cap [6,7] = \emptyset$

$= \underbrace{[3,4]}_{3,4} \cap [6,7] = \emptyset$

$\{x \in \mathbb{R};\ x > 5\} =]5, \infty[$

Bsp.: Geraden im $\mathbb{R}^2 = \{(x,y);\ x,y\in\mathbb{R}\}$
sind bestimmte Teilmengen, z.B.

$G_1 = \{(x,y);\ \underline{y = 2x+1},\ x\in\mathbb{R}\}$

$= \{(x, 2x+1);\ x\in\mathbb{R}\}$

$(1,3)\in G_1$ $\qquad$ $(2,6)\notin G_1$

$(1,5)\notin G_1$ $\qquad$ $(-3,-5)\in G_1$

$G_2 = \{(x,y);\ y=-x+2,\ x\in\mathbb{R}\} = \{(x,-x+2);\ x\in\mathbb{R}\}$

Schnitt: $G_1\cap G_2 = \{(x,y);\ \underline{-x+2=y=2x+1},\ x\in\mathbb{R}\} = \underline{\underline{\{(\tfrac13,\tfrac53)\}}}$

Haben: $-x+2 = 2x+1$

$\underset{|+x}{\Leftrightarrow} \quad 2 = 3x+1$

$\underset{|-1}{\Leftrightarrow} \quad 1 = 3x \quad \underset{|:3}{\Leftrightarrow} \quad \underline{\underline{x = \tfrac13}}$

Zugehöriges y ist $y = 2\cdot\frac13+1 = \frac53$

Differenz: $G_1\setminus G_2 = \{(x,y)\in G_1;\ (x,y)\notin G_2\} = G_1\setminus(G_1\cap G_2)$

$= G_1\setminus\{(\tfrac13,\tfrac53)\} = \{(x,2x+1);\ x\in\mathbb{R}\}\setminus\{(\tfrac13,\tfrac53)\}$

$= \{(x,2x+1);\ x\in\mathbb{R}\setminus\{\tfrac13\}\}$

$= \{(x,2x+1);\ x\neq\tfrac13\}$

Vollständige Induktion: $\forall n \in \mathbb{N}: A(n)$

Bew.: $\underbrace{A(1)}_{\text{Ind.anfang}} \wedge \underbrace{(\forall n \in \mathbb{N}: A(n) \Rightarrow A(n+1))}_{\text{Ind.schritt}}$

Beh.: $\forall n \in \mathbb{N}: \underbrace{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 \overset{!}{=} \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)}_{A(n)}$.

Bew. durch vollst. Induktion (nach n):

- Ind.anf.: $n = 1$: l.S. $= 1^2$, r.S. $= \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1$ ✓

- Ind.schritt: $n \rightsquigarrow n+1$: Sei die Formel richtig für ein n (Ind.annahme), dann gilt sie auch für $n+1$,

denn

l.S. für $n+1$: $\underbrace{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2}_{\overset{=}{\text{Ind.vor.}} \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)} + (n+1)^2$

$$= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2$$

$$= (n+1) \cdot \left(\frac{1}{6} n(2n+1) + (n+1) \right)$$

$$= (n+1) \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(n(2n+1) + 6n + 6 \right)$$

$$= \frac{1}{6} (n+1) \cdot (2n^2 + 7n + 6)$$

Polydiv.

$$\overset{\text{NR, s.u.}}{=} \frac{1}{6} (n+1)(n+2) \cdot (2n+3)$$

$$= \frac{1}{6} (n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1) = \text{r.S. für } n+1.$$

□

Polydivision:

$(2n^2 + 7n + 6) : (n+2) = 2n + 3$
$-(2n^2 + 4n)$
$\quad 3n + 6$
$\quad -(3n+6)$
$\qquad 0$

Alternativ ohne Polydiv.: $2n^2 + 7n + 6$

$= (2n^2 + 4n) + (3n + 6)$

$= 2n \cdot (n+2) + 3 \cdot (n+2)$

$= (2n+3) \cdot (n+2)$

NR: $(n+2) \cdot (2n+3) = \ldots = 2n^2 + 7n + 6$ ✓

Bsp., wo vollst. Ind. nicht weiterhilft:

Beh.: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\underset{n \geq 3}{\underline{n \text{ ungerade}}}$: $\underbrace{1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)}$ ist durch n teilbar.

Beweisversuch mit vollst. Ind.:

Ind.anf.: $n = 3$, $\quad 1 + 2 + 3 = 6$ ist durch 3 teilbar ✓

Ind.schritt: $\underbrace{1 + 2 + \ldots + (n-2)}_{\text{Ind.vor.: durch } n-1 \text{ teilbar}} + (n-1) + n = k \cdot (n-1) + (n-1) + n$

da $n-2$ ungerade,

d.h. $\exists k \in \mathbb{N}: 1 + 2 \ldots + (n-2) = k \cdot (n-1)$

$$= kn - k + 2n - 1$$
$$= (k+2)n - \underline{k-1}$$
$$\overset{?}{=} (\quad \ldots \quad) \cdot n$$

Krieg ed

Beh.: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\underset{n \geq 3}{\underline{n \text{ ungerade}}}$: $1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)$ ist durch n teilbar.

Bew.: Sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade.

Dann ist (laut kl. Gauß) $1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) = \underbrace{\tfrac{1}{2}(n-1)}_{\in \mathbb{N}} \cdot n$. (*)

Da n ungerade, ist $n-1$ gerade, also $\frac{1}{2}(n-1) \in \mathbb{N}$.

Also folgt mit (*), dass n Teiler des Terms ist. $\square$