Rel. ↑ A66. ↗

Tutorium zur Linearen Algebra I, zu L5/L6

Relationen: $R \subseteq X \times Y$ oder spezieller: $R \subseteq X \times X$

① Bsp.: in $X \times Y$ mit $X = \{1,2,3\}$, $Y = \{2,7,8\}$

$$X \times Y = \{(1,2), (1,7), (1,8), (2,2), (2,7), (2,8), (3,2), (3,7), (3,8)\}$$

$X = \{1,2,3\}$, $Y = \{2,7,8\}$

Rel. "<": $R_1 = \{(1,2), (1,7), (1,8), (2,7), (2,8), (3,7), (3,8)\}$

Rel. "≤": $R_2 = R_1 \cup \{(2,2)\}$

Rel. ">": $R_3 = \{(3,2)\}$

Rel. "≥": $R_4 = \{(3,2), (2,2)\}$

Rel. "|" für teilt: $R_5 = \{(1,2), (1,7), (1,8), (2,2), (2,8)\}$ $(1|2, 1|7, 1|8, 2|2, 2|8)$

"Namenslose" Rel.: $R_6 = \{(1,2), (2,7), (1,7)\}$

$R_7 = \{(1,2), (2,7), (3,7)\}$

Welche Rel. sind linkstotal? R_1, R_2, R_7

$\forall x \exists y: xRy$

" " " rechtstotal? R_1, R_2, R_5

$\forall y \exists x: xRy$

" sind rechtseindeutig? R_3, R_4, R_7

$xRy_1 \wedge xRy_2 \Rightarrow y_1 = y_2$ (R_1 ist nicht rechtseind.)

" Rel. sind linkseind.? R_3

$x_1Ry \wedge x_2Ry \Rightarrow x_1 = x_2$

(2) Bsp. für Rel. in $X \times X$ mit $X = \{1,2,3\}$,

Rel. "<": $R_1 = \{(1,2), (1,3), \underline{(2,3)}\}$ nicht reflexiv, nicht symm., transitiv

Rel. "teilt": $R_2 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (3,3)\}$ reflexiv, nicht symm. transitiv

Rel. "$\leq$": $R_3 = R_1 \cup \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$ reflexiv, nicht symm., transitiv

reflexiv? symm.? transitiv? $\to \forall x,y,z \in X: \underbrace{xRy}_{\uparrow} \wedge \underbrace{yRz}_{\uparrow} \Rightarrow xRz$ ✓

$\hookrightarrow \forall x: xRx$ $\hookrightarrow \forall x,y \in X: xRy \Rightarrow yRx$

„ist Teilmenge von"

(3) Bsp. für Rel. "$\subseteq$" in $\underline{\underline{X = \mathcal{P}(Z)}}$, $Z = \underline{\underline{\{1,2,3\}}}$:

„$\subseteq$" ist: $\{(\emptyset,\emptyset), (\emptyset,\{1\}), \ldots$
$(\{1\},\{1\}), (\{1\},\{1,2\}), \ldots\ldots$ usw.

aber <u>nicht</u>, z.B. $(\{3,1\},\{2\}), (\{1\},\emptyset) \ldots$

Andere Rel., einfacher: Sei $X_0 = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \emptyset, \{2,3\}, \{2\}\}$ $\subseteq \mathcal{P}(Z)$.

$R =$ Rel. „$\subseteq$" auf X_0:
$R \subseteq X_0 \times X_0$

$$\begin{tikzcd}
\{2,3\} & & \{1,2\} \\
& \{2\} \arrow[ul, phantom, "\subseteq"] \arrow[ur, phantom, "\subseteq"] & \\
& \emptyset \arrow[u, phantom, "\subseteq"] \arrow[r, phantom, "\subseteq"] \arrow[uur, bend left] & \{1,3\}
\end{tikzcd}$$

Wurzel

"$\subseteq$" ist reflexiv, antisymm., transitiv $\to$ (Halb-)Ordnung

maximale El.?

d.h. $u \in X_0$ mit $\forall v \in X_0: u \overset{\subseteq}{=} v \Rightarrow u = v$ (Rel. hier)

④ Bsp. für Ä-Rel.: $X = \{1,2,3,4\}$ → reflexiv, symm., transitiv ✓

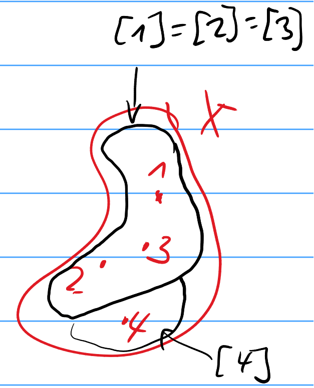
$$\sim\; = \{(1,1),\ (2,2),\ (3,3),\ (4,4),\ (1,2),\ (2,1),\ (2,3),\ (3,2),\ (1,3),\ (3,1)\}$$

Ä-Klassen: $[1] := \{x \in X;\ 1 \sim x\}$

$[y] := \{x \in X;\ y \sim x\}$

Hier: $[1] = \{1,2,3\} = [2] = [3]$

$[4] = \{4\}$



Menge der Ä-Klassen:

$$X/\sim\ = \{[1],[4]\} = \{[2],[4]\} = \{[3],[4]\}$$

---

⑤ Menge M der Geraden im $\mathbb{R}^2$: $M = \{g_{m,b};\ m,b \in \mathbb{R}\} \cup \{v_x;\ x \in \mathbb{R}\}$

$g_{m,b} := \{(x, \underbrace{mx+b}_{y});\ x \in \mathbb{R}\}$ mit $m,b \in \mathbb{R}$

Steigung, y-Achsenabschnitt

und $v_x := \{(x,y);\ y \in \mathbb{R}\}$ für $x \in \mathbb{R}$.

Ä-Rel.: $g_{m,b} \sim g_{n,c} \;:\Leftrightarrow\; m = n$

$v_u \sim v_v$ für alle u, v

$[g_{m,b}] = \{g_{n,c};\ g_{n,c} \sim g_{m,b},\ c \in \mathbb{R}\} = \{g_{m,c};\ c \in \mathbb{R}\}$

Somit: $[\underbrace{g_{m,0}}]$ ist die Klasse der Geraden mit Steigung m

Ursprungsgerade mit Steigung m

$[\underbrace{v_0}]$ ist die Kl. der Geraden, die parallel zur y-Achse sind

die y-Achse

$$\leadsto M/\sim\ = \{[g_{m,0}];\ m \in \mathbb{R}\} \cup \{[v_0]\}.$$

Abb.: $f: X \to Y$, $\forall x \in X\ \exists!\, y \in Y: y = f(x)$

linkstotal: $\forall x \in X\ \exists\, y \in Y: y = f(x)$

f injektiv $:\Longleftrightarrow$ Für jedes y ex. höchstens ein x mit $f(x) = y$.
f surjektiv $:\Longleftrightarrow$ " mindestens "
f bijektiv $:\Longleftrightarrow$ " genau "

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \cup\!\!\!\!\!\raisebox{0pt}{} \ni & & \ni \\ x & \longmapsto & y = f(x) \\ x & \xleftarrow[g]{} & y \end{array}$$

g Umkehrabb., falls f bijektiv.

f inj. $\Longleftrightarrow \exists$ Linksinv. g, d.h. $g \circ f = id_X$
f surj. $\Longleftrightarrow \exists$ Rechtsinv. g, d.h. $f \circ g = id_Y$
f bij. $\Longleftrightarrow \exists$ Inverse g, bzw. die Umkehrabb.

$$\left[\ \begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f"] & Y \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd} \qquad g \circ f(x) = id_X(x) = x, \text{ falls } g \text{ Linksinv. von } f\ \right]$$

1. Bsp.: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 1$

Falls $3x - 1 = y \Longleftrightarrow 3x = y + 1 \Longleftrightarrow x = \frac{y+1}{3}$.

Die Abb. ist bijektiv,
ihre Umkehrabb. ist $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(y) = \frac{y+1}{3}$

$\rightsquigarrow$ nenne y wieder um in x, schreibe $g(x) = \frac{x+1}{3}$.

2. Bsp.: $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, injektiv ✓, nicht surj.

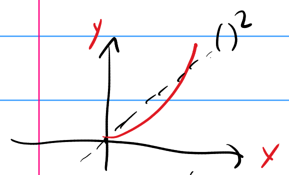
$\rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{l} f: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0},\ x \mapsto x^2 \text{ bij.} \\ \text{Umkehrabb.: } g: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0},\ x \mapsto \sqrt{x} \end{array} \right.$

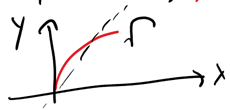
$g \circ f(x) = \sqrt{x^2} = x$
$f \circ g(x) = (\sqrt{x})^2 = x$

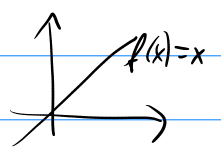
Frage: Welche Fkt. ist ihre eigene Umkehrfunktion?

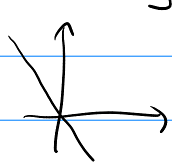
z.B. $f(x) = x$, oder $f(x) = -x$ $[-(-x) = x]$, oder $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$

$\left[\frac{1}{\frac{1}{x}} = x\right]$









$f: X \to Y$ Abb.
$A \subseteq X$, $B \subseteq Y$

Bild $f(A) := \{f(a);\ a \in A\}$

Urbild $f^{-1}(B) := \{x \in X;\ f(x) \in B\}$

Bestimme Bilder/Urbilder von $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \underbrace{2x-3}$

[Umkehrabb. $y = \frac{1}{2}(x+3)$]

Sei $A = [1.5, 4]$.
Dann ist $f(A) = [0, 5]$.

[$\underbrace{1.5 \leq x \leq 4}_{x \in A} \overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow} 3 \leq 2x \leq 8 \overset{-3}{\Leftrightarrow} 0 \leq \underbrace{2x-3}_{f(x)} \leq 5$]

Sei $B = [-4, 8]$.
Dann ist $f^{-1}(B) = [-\frac{1}{2}, \frac{11}{2}]$.

[$-4 \leq f(x) = y \leq 8 \Leftrightarrow -4 \leq 2x-3 \leq 8 \overset{+3}{\Leftrightarrow} -1 \leq 2x \leq 11 \overset{:2}{\Leftrightarrow} -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{11}{2}$]