Tutorium zur Linearen Algebra I, zu (L6)/L7

Ä-Relation

Geg. Menge X, Relation $\sim$ auf X, d.h. $\sim \subseteq X \times X$.

$\sim$ heißt Ä-Rel., falls (i) $\sim$ reflexiv, d.h. $\forall x \in X: \; x \sim x$

(D.h. $\{(x,x);\, x \in X\} \subseteq \sim$)

(ii) $\sim$ symmetrisch, d.h. $\forall x \in X \; \forall y \in X: \; x \sim y \Rightarrow y \sim x$

(iii) $\sim$ transitiv, d.h. $\forall x,y,z \in X: \; x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$

Bsp: Ä-Rel. in $\mathbb{N}_0$: $\quad X = \mathbb{N}_0$

Def. $x \sim y$, falls x und y denselben Rest $\in \{0,1,2\}$ bei Division durch 3 lassen.

Bsp.: $4 \sim 1$, da $4 = 1 \cdot 3 + 1$ und $1 = 0 \cdot 3 + 1$

$3 \sim 0$, da $3 = 1 \cdot 3 + 0$ und $0 = 0 \cdot 3 + 0$

$7 \not\sim 5$, da $7 = 2 \cdot 3 + 1$ und $5 = 1 \cdot 3 + 2$

$\rightsquigarrow$ Erhalten Ä-Klassen: $[x] = \{y \in \mathbb{N}_0;\; y \sim x\}$

Hier im Bsp.: $[0] = \{y \in \mathbb{N}_0;\; y \sim x\} = \{y \in \mathbb{N}_0;\; 3 \text{ teilt } y-x\}$
$= \{0, 3, 6, \ldots\}$
$= \{3 \cdot k;\; k \in \mathbb{N}_0\}$

$[1] = \{3 \cdot k + 1;\; k \in \mathbb{N}_0\} = \{1, 4, 7, 10, \ldots\}$

$[2] = \{3 \cdot k + 2;\; k \in \mathbb{N}_0\} = \{2, 5, 8, 11, \ldots\}$

Erhalten Ä-Kl.aufteilung: $X = \mathbb{N}_0 = [0] \cup [1] \cup [2]$

Quotientenmenge: $X/\sim \; = \{ [0], [1], [2] \}$

Verknüpfungen auf $X/\sim$ sind:

Plus: $[x] + [y] := [x+y]$

z.B. $[1] + [2] := [3] = [0]$

$[1] + [1] := [2]$

$\to \underbrace{[11]} + \underbrace{[4]} := [11+4] = [15] = [0]$

$[2] + [1] := [2+1] = [3] = [0]$

Mal: $[x] \cdot [y] := [x \cdot y]$

z.B. $[1] \cdot [2] := [2]$

$[1] \cdot [1] := [1]$

$\to \underbrace{[11]} \cdot \underbrace{[4]} := [11 \cdot 4] = [44] = [2]$

$[2] \cdot [1] := [2 \cdot 1] = [2]$

Repräsentantenunabh. von $+$: Sei $[x] = [u]$, $[y] = [v]$,

d.h. $x = 3 \cdot k + u$ und $y = 3 \cdot l + v$ für $k, l \in \mathbb{Z}$

Dann $[x] + [y] = [x+y] = [3 \cdot k + u + 3 \cdot l + v]$

$= [\underline{3 \cdot (k+l)} + (u+v)]$

$= [u+v] = [u] + [v]$ ✓

Repräsentantenunabh. von $\cdot$: Sei $[x] = [u]$, $[y] = [v]$,

d.h. $x = 3 \cdot k + u$ und $y = 3 \cdot l + v$ für $k, l \in \mathbb{Z}$

Dann: $[x] \cdot [y] = [xy] = [(3k+u) \cdot (3l+v)] = [\underline{9kl + 3kv + 3ul} + uv]$

$= [3 \cdot (\underline{3kl + kv + ul}) + uv] = [uv] = [u] \cdot [v]$ ✓

Hier: $\mathbb{F}_3 := \mathbb{N}_0/\sim \; = \{[0], [1], [2]\}$

+	[0]	[1]	[2]
[0]	[0]	[1]	[2]
[1]	[1]	[2]	[0]
[2]	[2]	[0]	[1]

·	[0]	[1]	[2]
[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[0]	[1]	[2]
[2]	[0]	[2]	[1]

$(\mathbb{F}_3, +)$ ist Gruppe ?

- neutr. El. : $[0]$

- Ex. von inversen El.: $\forall u \in \mathbb{F}_3 \; \exists v \in \mathbb{F}_3 : u + v = [0]$

  Sei $u = [x]$, mit $x \in \{0,1,2\}$, dann ist $v = [3-x]$ das inv. El. von u, weil $u + v = [x + (3-x)] = [3] = [0]$.

Haben: $[2] = -[1]$, $-[2] = [1]$, $-[0] = [0]$

- Assoziativität, d.h. $\forall u, v, w \in \mathbb{F}_3 : \underbrace{u + \underbrace{(v+w)}}= \underbrace{\underbrace{(u+v)} + w}$

Gilt hier im Bsp. ? Haben $u = [x]$, $v = [y]$, $w = [z]$, $x,y,z \in \{0,1,2\}$.

Dann: $u + (v+w) = [x] + ([y] + [z]) = [x] + [y+z]$

$= [x + (y+z)] \underset{\text{Assoz. in } (\mathbb{N}_0, +)}{=} [(x+y) + z]$

$= [x+y] + [z] = ([x] + [y]) + [z]$

$= (u + v) + w$. $\square$

- $(\mathbb{F}_3 \setminus \{\overset{0=[0]}{0}\}, \cdot)$ ist Gruppe ? Ja

  - neutr. El. $[1]$ ✓
  - $\forall u \in \mathbb{F}_3 \setminus \{0\} \; \exists v \in \mathbb{F}_3 \setminus \{0\} : u \cdot v = [1]$

Ja, gilt: Sei $u \in \mathbb{F}_3 \setminus \{0\}$ d.h. $u = [1]$ oder $u = [2]$

1. Fall: $u = [1] \rightsquigarrow v = [1] = u^{-1}$ ✓
2. Fall: $u = [2] \rightsquigarrow v = [2] = u^{-1}$ ✓

- assoziativität ✓
  - ↳ Assoz. von $\cdot$ in $(\mathbb{N}_0, \cdot)$

Hier: $\mathbb{F}_3 = \mathbb{N}_0 / \sim$ ist bzgl. $+, \cdot$

ein Ring, sogar **Körper**, weil $\mathbb{F}_3^* := \{ u \in \mathbb{F}_3 ;\ \exists v \in \mathbb{F}_3\ uv = 1 \}$
$= \mathbb{F}_3 \setminus \{0\}$ ✓

- Anderes Bsp.: Modul $M = 12$, $X = \mathbb{Z}$
  $m \sim n \iff m - n$ ist durch 12 teilbar

$\mathbb{Z}/12 = \mathbb{Z}/\sim = \{ [0], [1], \ldots, [11] \}$

$$[x] \overset{+}{\cdot} [y] := [x \overset{+}{\cdot} y]$$

Hier: $[6] \cdot [2] = [0]$, obwohl $[6] \neq [0]$, $[2] \neq [0]$

s. Vorl.: $(K, +, \cdot)$ Körper $\Rightarrow (u \cdot v = 0 \Rightarrow u = 0 \vee v = 0)$
(Satz vom Nullprodukt)

Wegen diesem Ergebnis ist $\mathbb{Z}/12$ kein Körper!

Auch anders zu sehen: $[0] \neq [2]$ hat in $\mathbb{Z}/12$ kein Inverses El.
(bzgl. $\cdot$)

$[1] \cdot [h] = [h]$

$\underbrace{[2] \cdot [x]}_{= [2x]} = [1]$ geht nicht
$[2x]$ ← gerader Repr.
$[1]$ ← unger. Repr.

$[3 \cdot x] = [1]$ geht nicht

$$(\mathbb{Z}/12)^* = \{ u \in \mathbb{Z}/12 ;\ \exists v \in \mathbb{Z}/12 : u \cdot v = 1 \}$$
$$= \{ [1], [5], [7], [11] \}$$ ← 1, 5, 7, 11 sind teilerfremd zu 12

da $[5] \cdot [5] = [1]$ da $[7] \cdot [7] = [1]$

$12 = 3 \cdot 4$

$\mathbb{Z}/13 = \{ \overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{11}, \overline{12} \}$

$(\mathbb{Z}/13)^* = \{ \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \ldots, \overline{11}, \overline{12} = \overline{-1} \} \overset{!}{=} (\mathbb{Z}/13) \setminus \{\overline{0}\}$

$\overline{12} = \overline{-1}$ und $(\overline{-1}) \cdot (\overline{-1}) = \overline{1}$

$\Rightarrow \mathbb{Z}/13$ Körper

$= \mathbb{F}_{13}$

Bsp.:

$(\mathbb{Z}/5)^* = \{ \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4} \} = \{ \overline{1}, \overline{2}, \overline{-2}, \overline{-1} \}$

$\mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/5$, Hier: $\overline{2}^{-1} = \overline{3}$,

da $\underbrace{\overline{2} \cdot \overline{3}}_{=\overline{6}} = \overline{1}$
