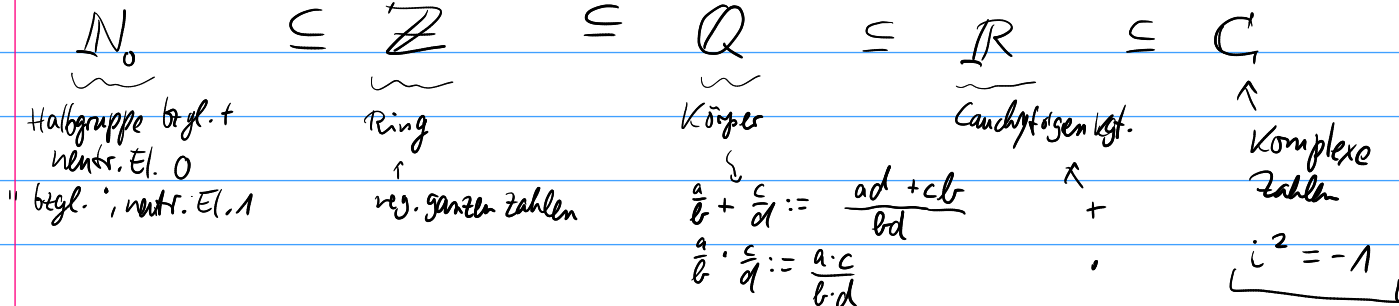


Tutorium zur Linearen Algebra I, zu L8/L9

VR/LVR
↓

↑
C und Polynome

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}, \quad \frac{1}{b} = b^{-1}, \quad b \neq 0$$



Körper $\mathbb{C}$: $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 := \{ (x, m); x, m \in \mathbb{R} \}$

$\uparrow$ $\uparrow$
 Realteil Imaginärteil
 $\searrow$ $\swarrow$

$z \in \mathbb{C}$

$$\leadsto z = (x, m) = x \cdot \underbrace{(1, 0)}_{=1} + m \cdot \underbrace{(0, 1)}_{=i} = x + m i$$

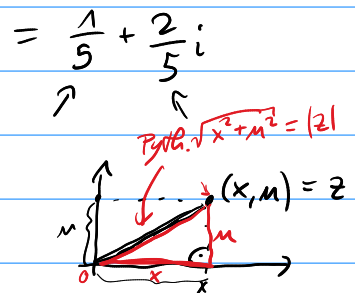
$$(x+mi) + (y+ri) := (x+y) + (m+r)i$$

$$\underbrace{(x+mi)}_{\uparrow} \cdot \underbrace{(y+ri)}_{\uparrow} := \underline{(xy - mr)} + \underline{(xv + my) \cdot i}$$

Bsp.: $(3+4i) \cdot (-4i) = -12i - 28 \underbrace{i^2}_{=-1} = -12i + 28$

$\uparrow$ $\uparrow$
 Imag. teil Realteil

$$\frac{1}{1-2i} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{erw. mit} \\ \text{Konjug. u. Komplex}}}{=} \frac{1+2i}{(1-2i)(1+2i)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{3. bin. F.}}}{=} \frac{1+2i}{1^2 - 2^2 \cdot \underbrace{i^2}_{=-1}} = \frac{1+2i}{1+4} = \frac{1}{5}(1+2i)$$



Das Konjugiert Komplexe von $z = x+mi \in \mathbb{C}$ ist $\bar{z} = x-mi$.

Haben: $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} \leftarrow \text{im Nenner reell!} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}, \quad |x+im|^2 = (x+mi) \cdot (x-mi)$

$\uparrow$
 $\underbrace{x^2 + m^2}_{\substack{\text{3. bin. F.}}} \leftarrow$

-2-

Bsp.:

- $2i + 1 - 4i = 1 - 2i$
- $2i(1 - 4i) = 8 + 2i$
- $|1 - 2i| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$
- $\overline{-2i + 1} = 2i + 1$

↗ $\operatorname{Re} \frac{1}{1-2i} = \frac{1}{5}$

$\frac{1}{1-2i} \stackrel{\text{s.o.}}{=} \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$

$\operatorname{Im} \frac{1}{1-2i} = \frac{2}{5}$

Die $z \in \mathbb{C}$ mit $\underbrace{z^2 = -4}$ sind $z = 2i$ und $z = -2i$.

$\downarrow$
 $(\Rightarrow) z^2 + 4 = 0$

$$(\Rightarrow) (z - 2i) \cdot (z + 2i) = 0$$

haben $P(x) = x^2 + 4 = \underbrace{(x - 2i)} \underbrace{(x + 2i)}$.

$$P(z) \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow (z - 2i)(z + 2i) = 0$$

$$(\Rightarrow) z - 2i = 0 \vee z + 2i = 0$$

$$\Leftrightarrow z = 2i \vee z = -2i$$

$x^2 + 4$ hat $z = 2i$ als Nullstelle.

$$x^2 + 4 = (x - 2i) \cdot S$$

Polynomdiv.: $\underbrace{(x^2 + 4)} : \underbrace{(x - 2i)} = \underbrace{x + 2i}$

$$\begin{array}{r} x^2 + 4 \\ -(x^2 - 2i \cdot x) \\ \hline 2i \cdot x + 4 \\ -(2i \cdot x + 4) \\ \hline 0 \end{array}$$

da $-2i \cdot 2i = 4$

$$x^2 + 2x + 4 = 0$$

$\begin{matrix} & & \uparrow & & \uparrow \\ & p & & q & \\ & \uparrow & & \uparrow & \end{matrix}$

p-q-Formel: $x_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1-4} = -1 \pm \sqrt{-3}$ keine Lsg. in $\mathbb{R}$

$\begin{matrix} & \downarrow & & \downarrow \\ & (-)^2 & & \uparrow \end{matrix}$

$$\sqrt{-3} = \sqrt{(-1) \cdot 3} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{3} = \pm i \sqrt{3}$$

$$\rightarrow x_{1/2} = -1 \pm \sqrt{3} \cdot i \text{ zwei Lsgn. in } \mathbb{C}$$

$$\text{Haben: } x^2 + 2x + 4 = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

$$= (x - (-1 + i\sqrt{3})) \cdot (x - (-1 - i\sqrt{3}))$$

$$= (x + \underbrace{1 - i\sqrt{3}}_{\uparrow \in \mathbb{C}}) \cdot (x + \underbrace{1 + i\sqrt{3}}_{\uparrow \in \mathbb{C}})$$

Polydiv.:

$$\frac{x^3 - 1}{x - 1} = x^2 + x + 1$$

Denn:

$$(x^3 - 1) : (x - 1) = x^2 + x + 1$$

$$x^2 \cdot (x-1) \rightsquigarrow$$

$$-(x^3 - x^2)$$

$$\underline{x^2 - 1}$$

$$x \cdot (x-1) \rightsquigarrow$$

$$-(x^2 - x)$$

$$\underline{x - 1}$$

$$1 \cdot (x-1) \rightsquigarrow$$

$$-(x - 1)$$

$$\underline{0}$$

Polydiv., die nicht aufgeht:

$$\frac{x^3 - 2}{x - 1}$$

$$= \frac{x^3 - 1 - 1}{x - 1} = \frac{x^3 - 1}{x - 1} - \frac{1}{x - 1} = x^2 + x + 1 + \frac{-1}{x - 1}$$

Denn: $(x^3 - 2) : (x - 1) = x^2 + x + 1 + \frac{-1}{x - 1}$ Rest -1

$$\rightarrow x^3 - 2 = (x^2 + x + 1) \cdot (x - 1) - 1$$

$\begin{matrix} \uparrow & & \uparrow \\ \text{Rechnung in } \mathbb{R}[x] & & \text{Rest} \end{matrix}$

$$\begin{array}{r} x^2 - 2 \\ -(x^2 - x) \\ \hline x - 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x - 2 \\ -(x - 1) \\ \hline -1 \end{array} \leftarrow \text{Rest} \neq 0$$

Nullstelle von $2X^3 - X - 14$ ist $X=2$,
denn $2 \cdot 2^3 - 2 - 14 = 0$ ✓

Also ist $(2X^3 - X - 14) : (X - 2) \in \mathbb{R}[X]$,

nämlich $(2X^3 - X - 14) : (X - 2) = 2X^2 + 4X + 7$

$$\begin{array}{r}
 2X^3 - X - 14 \\
 - (2X^3 - 4X^2) \\
 \hline
 4X^2 - X - 14 \\
 - (4X^2 - 8X) \\
 \hline
 7X - 14 \\
 - (7X - 14) \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Somit: $2X^3 - X - 14 = (X - 2) \cdot (2X^2 + 4X + 7)$
 abgespaltener Linearfaktor zur Nst. $X=2$

Polynome über Körper K : $K[T] = \left\{ \underbrace{a_0 + a_1 T + \dots + a_m T^m}_{= \sum_{i=0}^m a_i T^i}; m \in \mathbb{N}_0, a_0, a_1, \dots, a_m \in K \right\}$

$\deg(a_0 + a_1 T + \dots + a_m T^m) = m$, falls $a_m \neq 0$

Bsp.: $P_1 = -11X + 23X^4 - 3 + 18X^3 \in \mathbb{R}[X]$
 $\deg P_1 = 4$

$P_2 = -iX^5 - 6i + 3 \in \mathbb{C}[X] \rightarrow \deg P_2 = 5$

$P_3 = (X^3 + 1)(X^2 - 2) - X^5$
 $= \underbrace{X^5}_{\sim} - 2X^3 + X^2 - 2 - \underbrace{X^5}_{\sim} \rightarrow \deg P_3 = 3$

$P_4 = \overline{3}X - \overline{11}X^2 + \overline{5}X^3 \in \mathbb{F}_5[X] \rightarrow \deg P_4 = 2$
 $\overline{1} = \overline{11} \neq \overline{0}$
 $-\overline{11} = -\overline{11} = -\overline{1} = \overline{-1} = \overline{5-1} = \overline{4}$

$$\frac{x^3-1}{x-1} = x^2 + x + 1 \quad \text{ist mit } n=2$$

Spezialfall der
Formel von der geom. Summe:

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}, \quad \text{jedes } x \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$$

Bsp.: $x=2$: $n=0$: $1 = \frac{2^{0+1}-1}{2-1} \checkmark$

$n=1$: $1+2=3 = \frac{2^{1+1}-1}{2-1} = \frac{4-1}{2-1} \checkmark$

$n=2$: $1+2^1+2^2=7 = \frac{2^{2+1}-1}{2-1} = \frac{8-1}{2-1} \checkmark$

$n=3$:

$1+2+2^2+2^3=15 = \frac{2^{3+1}-1}{2-1} = \frac{16-1}{2-1} \checkmark$
 $\underbrace{\quad}_{=8}$

Haben also

← vollst. Ind.

$$\frac{x^{11}-1}{x-1} = 1 + x + x^2 + \dots + x^{10}$$

$$-1 = (-1)^{11}, \quad -x^{11} = (-x)^{11}$$

$$\frac{x^{11}+1}{x+1} = \frac{x^{11}-(-1)}{x-(-1)} = \frac{(-1) \cdot (x^{11}-(-1))}{(-1) \cdot (x-(-1))} = \frac{-x^{11}-1}{(-x)-1} = \frac{(-x)^{11}-1}{(-x)-1}$$

erw. mit -1

Sei $n=-x$

$$= \frac{n^{11}-1}{n-1} \stackrel{\text{geom } \Sigma}{=} 1+n+n^2+\dots+n^{10} = 1+(-x)+(-x)^2+\dots+(-x)^{10} = 1-x+x^2-x^3+\dots+x^{10}$$

$\mathbb{C}$ auf andere Weise konstruieren (8.35):

$$\text{Betr. } M = \mathbb{R}[X] = \left\{ \sum_{i=0}^n a_i X^i ; n \in \mathbb{N}_0, a_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

Haben Ä'-Rel. $\sim$ auf $M = \mathbb{R}[X]$:

$$f(X) \sim g(X) : \Leftrightarrow \exists h \in \mathbb{R}[X] : f(X) - g(X) = h(X) \cdot (X^2 + 1)$$

ist reflexiv/symm./transitiv

$\leadsto$ die Ä'-Klassen können verknüpft werden

$$[f(X)] + [g(X)] := [f(X) + g(X)]$$

$$\leadsto [f(X)] \cdot [g(X)] = [f(X) \cdot g(X)]$$

$$[X^3 + X] = [\underline{0}]$$

$$= [X \cdot (X^2 + 1)]$$

$$[X^3 + X + 1] = [1]$$

$$[X + 1]$$

$$\text{Jede Klasse } [f(X)] = [(X^2 + 1) \cdot S + R] = [(X^2 + 1) \cdot S] + [R] = [R]$$

$$\uparrow \quad \uparrow$$

$$f(X) = (X^2 + 1) \cdot S + R \quad \quad \quad = [0]$$

Rest hat Grad ≤ 1

Grad 1-Polynom: $aX + b$

"Integral" "Rat. Teil"

$$\leadsto [aX + b] = a[X] + b \cdot [1]$$

$$= b + a[X]$$

Haben

$$[X]^2 = -1,$$

$$\Leftrightarrow [X]^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow [X^2] + [1] = 0$$

$$\Leftrightarrow [X^2 + 1] = [0] \quad \checkmark$$

Viel. von $X^2 + 1$

Also "i" = $[X]$

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}[X] / \sim = \{ [b + aX] = b + a \cdot [X] ; b, a \in \mathbb{R} \}$$