Tutorium zur Linearen Algebra I, zu L9 – L11

Aufg.: Vor.: $v_1, \dots, v_n$ lin. abh.

Beh.: $v_n \in L(v_1, \dots, v_{n-1})$ oder $v_1, \dots, v_{n-1}$ lin. unabh.

Erinnerung: $v_1, \dots, v_n$ heißen lin. unabh., falls:

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$

• z.B. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ lin. unabh.,

da $0 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$

d.h. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 2\lambda_1 - 4\lambda_2 \end{pmatrix}$

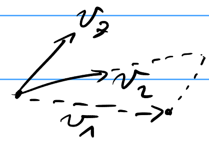
$\Rightarrow \underline{\lambda_1 = 0}$, in 2. Glg. $0 = 2\lambda_1 - 4\lambda_2$ einsetzen

$\rightarrow \quad 0 = 2 \cdot 0 - 4\lambda_2 \Rightarrow \underline{\lambda_2 = 0}.$

$\rightsquigarrow$ • z.B. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ lin. abh.,

$\rightarrow$ weil $1 \cdot v_1 - \underbrace{2 \cdot v_2 + v_3}_{} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ ✓

$\hookrightarrow \quad \underline{v_1} = \underbrace{2v_2 - v_3}_{} \in \underline{L(v_2, v_3)}$



• z.B. $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ lin. abh.,

weil $0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 1 \cdot u_3 = 0$,

aber

$u_3 \in L(u_1, u_2)$, da $u_3 = 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2$ ← u_3 ist nur trivial Kombinar aus u_1, u_2

$u_1 = 0 \cdot u_2 + 3 \cdot u_3 \in L(u_2, u_3)$

$\neq 0$ ← ist nichttriv. LK

<u>Aufg.</u>: Vor.: $v_1, \dots, v_n$ lin. abh. — höchstens $n-1$ viele ...

→ Beh.: $v_n \in L(v_1, \dots, v_{n-1})$ oder $v_1, \dots, v_{n-1}$ lin. unabh.

Bew.: Da $v_1, \dots, v_n$ lin. abh., ex. nicht triv. LK des Vektors o,

d.h. $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n$, nicht alle $=0$, mit $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = o$.

1. Fall: $\lambda_n \neq 0$,

Dann $\lambda_n v_n = -\lambda_1 v_1 - \dots - \lambda_{n-1} v_{n-1}$,

also, da $\lambda_n \neq 0$, ist $v_n = -\frac{\lambda_1}{\lambda_n} v_1 - \dots - \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} v_{n-1}$,

d.h. $v_n \in L(v_1, \dots, v_{n-1})$. ✓

- Falls $\lambda_n = 0$, dann .... ?

Gegen-Bsp.: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, sind lin. abh. ✓

Nun ist $v_3 \notin L(v_1, v_2)$,

und v_1, v_2 sind lin. abh., weil $2v_1 - v_2 = o$.

Geg. VR V, $A, B \subseteq V$.

Beh: $L(A \cap B) = L(A) \cap L(B)$ ← „$\subseteq$" gilt ✓, „$\supseteq$" falsch!

$\subseteq, \supseteq$

Bew.: „$\subseteq$": Sei $x \in L(A \cap B)$, dann ist $x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$

für $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ und $v_1, \dots, v_n \in A \cap B$

da $A \cap B \subseteq A$, ist $x \in L(A)$,

und da $A \cap B \subseteq B$, ist $x \in L(B)$. $\Big\}$ Also: $x \in L(A) \cap L(B)$.

„$\supseteq$": Sei $x \in L(A) \cap L(B)$, d.h. $x \in \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m$, mit $a_i \in A$

und $x \in \mu_1 b_1 + \dots + \mu_r b_r$, mit $b_j \in B$.

z.B. $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{Q}$, $V = \mathbb{R}$ ⇝ $A \cap B = \emptyset$ ... ?

⇝ $L(A \cap B) = L(\emptyset) = \{0\} \neq \underbrace{L(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})}_{=\mathbb{R}} \cap \underbrace{L(\mathbb{Q})}_{=\mathbb{R}} = \mathbb{R}$

$\subseteq$

Beh.: Jeder UVR U von V ist lin. Hülle einer Teilmenge A von V.
D.h. Für jeden UVR U von V gibt es eine Teilmenge A von V mit $U = L(A)$,
d.h. $\forall U, U$ UVR von V, $\exists A \subseteq V: U = L(A)$.

Bew.: Nach Basissatz der Vorl. hat U eine Basis A, also: A erzeugt U, d.h. $U = L(A)$. $\square$

Beh.: $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}$ sind lin. abh.

Bew.: Ansatz $\lambda_1 \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$$\to \text{LGS: } \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 + 4\lambda_2 + 7\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 5\lambda_2 + 8\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + 6\lambda_2 + 9\lambda_3 = 0 \end{array} \right\} \leadsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} |\cdot(-2) \;\; |\cdot(-3) \\ + \\ + \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} |\cdot(-2) \\ + \end{array} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Glg. III: $0 \cdot \lambda_3 = 0$, Sei $\lambda_3 = \lambda$ Parameter

in Glg. II: $-3 \cdot \lambda_2 - 6 \cdot \underbrace{\lambda_3}_{=\lambda} = 0$
$\Rightarrow -3 \cdot \lambda_2 = 6\lambda \Rightarrow \lambda_2 = -2\lambda$

in Glg. I: $\lambda_1 + 4 \cdot \underbrace{\lambda_2}_{=-2\lambda} + 7 \cdot \underbrace{\lambda_3}_{=\lambda} = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 - 8\lambda + 7\lambda = 0$
$\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda$

z.B. ist $\lambda = 10$ mögl. $\to \lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = -20$

$$\leadsto \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix}\lambda\\-2\lambda\\\lambda\end{pmatrix}; \lambda \in \mathbb{R} \right\} = L\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right).$$

$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix} = 0$

Variablen? λ_1, λ_2

Bsp.: $\mathbb{L} = L\left(\begin{pmatrix}1\\-6\end{pmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$, welches homogene LGS hat diese Lösungsmenge?

$$= \left\{ \begin{pmatrix}\lambda\\-6\lambda\end{pmatrix};\ \lambda\in\mathbb{R}\right\}, \text{ d.h. } \begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda\\-6\lambda\end{pmatrix}, \leftarrow \begin{cases}\lambda_1=\lambda\\ \lambda_2=-6\lambda\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}\lambda\\-6\lambda\end{pmatrix} = \lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - 6\lambda\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 + \frac{1}{6}\lambda_2 = 0$$
$$\iff 2\lambda_1 + \frac{1}{3}\lambda_2 = 0$$
$$\iff \underbrace{6\lambda_1 + \lambda_2 = 0}$$

Welches LGS haben Sie gelöst?

$6\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ ← 1 Glg., 2 Unbek.

$$\mathbb{L} = L\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\-8\\11\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right) = \left\{\lambda_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}4\\-8\\11\end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix};\ \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}\right\}$$

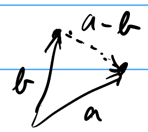
$\mathbb{L} = \mathbb{R}^3$, da lin. unabh.

ist Lsg. von z.B. $0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 = 0 \iff 0 = 0$

Vor.: V sei K-VR, $a, b \in V$.

Beh.: a, b, $a-b$ lin. abh.

Bew.: Denn $1\cdot a + \underbrace{(-1)}_{\neq 0}\cdot b + (-1)\cdot(a-b) = 0$. □

- Bild, falls a, b lin. unabh.:  $b + (a-b) = a$
- Bild, falls a, b lin. abh.  $b + (a-b) = a$
  $L(a,b) = L(a)$ für $a \neq 0$

Bsp.: Summe von UVRen: $V = \mathbb{R}^3$, $U_1 = \overbrace{L\left(\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}\right)}^{y\text{-Achse}} = L(e_2)$, $U_2 = L\left(\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\right) = \underbrace{L(e_3)}_{z\text{-Achse}}$

Dann: $\underbrace{U_1 + U_2}_{= L(U_1 \cup U_2)} = L\Big(\underbrace{\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}}_{\text{lin. unabh.}}\Big) = L(e_2, e_3)$ ist yz-Ebene, beschrieben durch

$\Rightarrow \dim(U_1 + U_2) = 2$

das LGS $\left\{\begin{matrix} x_1 = 0 \\ 0\cdot x_2 = 0 \\ 0\cdot x_3 = 0\end{matrix}\right\}$

$\dim U_1 = 1 = \dim U_2$

Dim.formel: $\dim(\underbrace{U_1+U_2}) = \underbrace{\dim U_1} + \underbrace{\dim U_2} - \dim U_1 \cap U_2$

Hier: $2 = 1 + 1 - \dim U_1 \cap U_2$

$\Rightarrow \dim U_1 \cap U_2 = 0 \Rightarrow U_1 \cap U_2 = \{0\}$

Hier: $U_1 \cap U_2 = L(e_2) \cap L(e_3)$. Sei $x \in U_1 \cap U_2$,

dann $x = \lambda e_2 = \mu e_3$, für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

dann

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\lambda = 0} \\ \underline{\mu = 0} \end{cases}$$

Also $x = 0$.

Also: $U_1 \cap U_2 = \{0\}$, $\dim U_1 \cap U_2 = 0$.