

Lineare Algebra I, SoSe 24 Blatt 1

Aufgabe 1:

Für die Menge der negativen ganzen Zahlen verwendet man auch die suggestive Notation $-\mathbb{N}$. Das kommt daher, dass man die Menge der negativen ganzen Zahlen aus der Menge \mathbb{N} der natürlichen Zahlen erhält, indem man vor jede natürliche Zahl ein Minuszeichen setzt. Somit hat diese Notation den Vorteil, dass man sofort versteht welche Menge gemeint ist. Solche Notationen sind also sehr praktisch. Finden Sie auch für die folgenden Mengen Suggestivnotation:

- (i) Die Menge der geraden Zahlen
- (ii) Die Menge der ungeraden Zahlen
- (iii) Die Menge aller (ganzzahligen) Potenzen einer festen reellen Zahl x
- (iv) Die Menge der positiven reellen Zahlen
- (v) Die Menge der rationalen Zahlen deren Nenner eine 3er-Potenz ist

Aufgabe 2:

Seien A , B und C mathematische Aussagen. Untersuchen Sie mit Hilfe einer Wahrheitstabelle, welche der folgenden Aussagen äquivalent zueinander sind:

- (i) $(A \vee B) \Rightarrow C$
- (ii) $(\neg A) \vee (\neg B) \vee C$
- (iii) $(A \wedge B) \vee C$
- (iv) $(A \Rightarrow C) \vee (B \Rightarrow C)$
- (v) $\neg((A \vee B) \wedge (\neg C))$

Aufgabe 3:

Wir betrachten die folgenden zwei Prädikate:

$$P(x, y) = x + y \text{ ist eine Quadratzahl} \quad \text{und} \quad Q(x, y) = x - y \text{ ist eine Primzahl}$$

Hierbei nennen wir eine natürliche Zahl n eine Quadratzahl, wenn es eine natürliche Zahl m mit $m^2 = n$ gibt.

Lineare Algebra I, SoSe 24

Blatt 1

- (i) Finden Sie natürliche Zahlen a und b , sodass $P(a, b)$ und $Q(b, a)$ wahr sind.
- (ii) Finden Sie natürliche Zahlen a, b und c , sodass $P(a, b)$, $Q(b, c)$ und $P(c, a)$ wahr sind.
- (iii) Finden Sie natürliche Zahlen a und b , sodass $P(a, b)$, $Q(a, b)$ und $Q(2b, a)$ wahr sind.

Aufgabe 4:

Sei A die Aussage "Jede natürliche Zahl ist Summe dreier Quadratzahlen."

- (i) Formulieren Sie A rein unter Verwendung von Symbolen ($\wedge, \vee, \neg, \forall, \exists, +, \cdot$, etc.) und Ihnen bereits bekannten Zahlmengen (d.h. definieren Sie sich keine neue Mengen für diese Aufgabe).
- (ii) Nutzen Sie den vorherigen Aufgabenteil, um die Negation von A zu bilden. Sorgen Sie dabei dafür, dass das Symbol " \neg " am Ende nicht mehr in Ihrer Lösung auftaucht.
- (iii) Ist A wahr? Zeigen oder widerlegen Sie A .

Lineare Algebra I, SoSe 24 Blatt 1

Fragenkatalog zu den Abschnitten L1-L2 (nicht abzugeben):

- Was ist ein Satz?
- Welche Arten/Varianten von Sätzen gibt es?
- Was ist eine Aussage?
- Was ist die Konjunktion $A \wedge B$ zweier Aussagen A und B ?
- Was ist die Disjunktion $A \vee B$ zweier Aussagen A und B ?
- Was ist die Negation $\neg A$ einer Aussage A ?
- Kommt es bei Konjunktionen/Disjunktionen auf die Reihenfolge der Aussagen an?
- Was ist die Implikation $A \Rightarrow B$?
- Was ist die Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$ zweier Aussagen A und B ?
- Was ist die Hinrichtung/Rückrichtung einer Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$?
- Welche Logikregeln haben wir für \wedge , \vee und \neg gesehen?
- Welche Logikregeln haben wir für \Rightarrow und \Leftrightarrow gesehen?
- Welche Arten von Beweisen gibt es?
- Was ist ein Prädikat?
- Was ist der Allquantor \forall ?
- Was ist der Existenzquantor \exists ?
- Wie negiert man Prädikate mit Quantoren?
- Kommt es bei Quantoren auf die Reihenfolge an?
- Können Sie für alle obigen Begriffe konkrete Beispiele/Gegenbeispiele angeben?

Lineare Algebra I, SoSe 24

Blatt 1

Einige generelle Tipps zur Bearbeitung von Übungsblättern:

- Beginnen Sie möglichst früh damit, sich mit den Aufgaben auseinanderzusetzen
- Machen Sie sich die exakte Bedeutung der verwendeten Begriffe und Definitionen durch Nachschlagen im Skript bewusst
- Manche Aufgaben können Sie (vermutlich) nur unter Zuhilfenahme von Resultaten aus der Vorlesung lösen, sodass Sie stets im Blick haben sollten, was Sie denn bereits über gegebene Objekte wissen
- Selbst wenn Sie eine Definition oder eine Aussage kennen, hilft es, sich diese mit Beispielen zu veranschaulichen
- Manche Aussagen lassen sich leichter per Widerspruchsbeweis oder per Kontraposition zeigen; versuchen Sie also ruhig verschiedene Ansätze
- Lassen Sie sich nicht zu sehr frustrieren, wenn Sie nicht alles auf Anhieb lösen können
- Sprechen Sie mit Anderen über die Aufgaben (sowohl Kommilitonen, Korrektor*innen als auch Übungsgruppenleiter*innen bieten sich dort zum Beispiel an)
- Suchen Sie nicht nach (vollständigen) Lösungen online (oder in Büchern etc.), da dies nur Ihr eigenes Verständnis bremst (auch das Versuchen und Scheitern an Problemen ist lehrreich, selbst wenn es erstmal nicht so scheint)
- Begründen Sie Ihre Antworten, außer wenn explizit dabei steht, dass Sie es nicht tun müssen
- Schreiben Sie Ihre Lösungen möglichst nicht als eine reine Folge von Symbolen auf, sondern verwenden Sie auch vollständige (deutsche oder englische) Sätze um Ihre Gedanken zu erklären