Heinrich Heine Universität Düsseldorf

PD Dr. Karin Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Lineare Algebra I, SoSe 24
Blatt 10

Aufgabe 1:
Wir betrachten das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x - 2y + 2z &= 2 \\ x - 3y + z \ &= 0 \\ -3x + 2y - 7z &= 1 \end{aligned}$$

(i) Geben Sie die zugehörige erweiterte Matrix an.

(ii) Lösen Sie obiges lineares Gleichungssystem mit Hilfe des Gauß-Algorithmus.

Aufgabe 2:
Sei K ein Körper in dem $2 \neq 0$ gilt und sei $K[T]_{\leq 1}$ der Vektorraum der Polynome $f \in K[T]$ mit Grad $\deg(f) \leq 1$. Zudem betrachten wir die Basen $B = (1, T)$ und $C = (-1, 2T)$ von $K[T]_{\leq 1}$ und den Endomorphismus

$$f\colon K[T]_{\leq 1} \to K[T]_{\leq 1},\ aT + b \mapsto a.$$

(i) Berechnen Sie die Koordinatenvektoren $K_B(aT + b)$ und $K_C(aT + b)$ für $a, b \in K$.

(ii) Bestimmen Sie die darstellende Matrix von f bzgl. B und C.

(iii) Bestimmen Sie die Basiswechselmatrix von B nach C und von C nach B.

Aufgabe 3:
Sei $A \in K^{n \times n}$ eine Matrix, die in jeder Zeile genau eine 1 und sonst nur 0en besitzt.

(i) Was kann der Rang einer solchen Matrix sein?

(ii) Wir nehmen nun zusätzlich an, dass $\mathrm{rk}(A) = n$ ist. Begründen Sie, dass auch A^{-1} in jeder Zeile genau eine 1 und sonst nur 0en besitzt und geben Sie zudem an, in welchen Spalten sich die 1en befinden.

Aufgabe 4:
Wir hatten in der Vorlesung gesehen, dass eine Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K^{2\times 2}$$

bitte wenden/scrollen

PD Dr. Karin Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Lineare Algebra I, SoSe 24
Blatt 10

genau dann invertierbar ist, wenn $ad - bc \neq 0$ ist. Zudem hatten wir gesehen, dass in diesem Fall die Inverse durch

$$\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \in K^{2\times 2}$$

gegeben ist. Leiten Sie den ersteren Fakt nochmal mit Hilfe des Gauß-Algorithmus her.

PD Dr. Karin Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Lineare Algebra I, SoSe 24
Blatt 10

Fragenkatalog zu dem Abschnitt L17-L18 (nicht abzugeben):

- Wie sieht der Diagrammwürfel aus?
- Was sind Basiswechselmatrizen?
- Was besagt der Basiswechselsatz?
- Wie sehen die Basiswechselmatrizen eines Endomorphismuses aus?
- Wie bestimmt man die Basiswechselmatrizen eines Endomorphismuses von K^n?
- Wann nennt man zwei Matrizen A und B äquivalent?
- Wann nennt man zwei Matrizen A und B ähnlich?
- Wie sieht jede $(n \times m)$-Matrix bis auf Äquivalenz aus?
- Wie kann man die Äquivalenz von Matrizen über deren Ränge bestimmen?
- Was ist eine Determinantenfunktion?
- Wie viele normierte Determinantenfunktionen gibt es?
- Was ist die Determinante eines Endomorphismus $f\colon K^n \to K^n$?
- Welche Eigenschaften haben Determinantenvon Endomorphismen von K^n?
- Was ist die Determinante eines Endomorphismus $f\colon V \to V$, wobei V ein beliebiger endlich-dimensionaler Vektorraum ist?
- Welche Eigenschaften haben Determinanten von Endomorphismen von allgemeinen endlich-dimensionalen Vektorräumen V?
- Können Sie für alle obigen Begriffe konkrete Beispiele/Gegenbeispiele angeben?

PD Dr. Karin Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Lineare Algebra I, SoSe 24
Blatt 10

Einige generelle Tipps zur Bearbeitung von Übungsblättern:

- Beginnen Sie möglichst früh damit, sich mit den Aufgaben auseinanderzusetzen
- Machen Sie sich die exakte Bedeutung der verwendeten Begriffe und Definitionen durch Nachschlagen im Skript bewusst
- Manche Aufgaben können Sie (vermutlich) nur unter Zuhilfenahme von Resultaten aus der Vorlesung lösen, sodass Sie stets im Blick haben sollten, was Sie denn bereits über gegebene Objekte wissen
- Selbst wenn Sie eine Definition oder eine Aussage kennen, hilft es, sich diese mit Beispielen zu veranschaulichen
- Manche Aussagen lassen sich leichter per Widerspruchsbeweis oder per Kontraposition zeigen; versuchen Sie also ruhig verschiedene Ansätze
- Lassen Sie sich nicht zu sehr frustrieren, wenn Sie nicht alles auf Anhieb lösen können
- Sprechen Sie mit Anderen über die Aufgaben (sowohl Kommilitonen, Korrektor*innen als auch Übungsgruppenleiter*innen bieten sich dort zum Beispiel an)
- Suchen Sie nicht nach (vollständigen) Lösungen online (oder in Büchern etc.), da dies nur Ihr eigenes Verständnis bremst (auch das Versuchen und Scheitern an Problemen ist lehrreich, selbst wenn es erstmal nicht so scheint)
- Begründen Sie Ihre Antworten, außer wenn explizit dabei steht, dass Sie es nicht tun müssen
- Schreiben Sie Ihre Lösungen möglichst nicht als eine reine Folge von Symbolen auf, sondern verwenden Sie auch vollständige (deutsche oder englische) Sätze um Ihre Gedanken zu erklären