

## Lineare Algebra I, SoSe 24 Blatt 11

---

### Aufgabe 1:

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

ist invertierbar. Bestimmen sie die Inverse  $A^{-1}$ .

### Aufgabe 2:

Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

indem Sie

- (i) den Gauß-Algorithmus verwenden.
- (ii) den Laplaceschen Entwicklungssatz verwenden.

### Aufgabe 3:

Bestimmen Sie, für welche  $t \in \mathbb{R}$  die Matrix

$$A_t = \begin{pmatrix} 2t & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2t \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

invertierbar ist.

### Aufgabe 4:

Seien  $A, B \in K^{n \times n}$  für einen Körper  $K$ . Kann man die Determinante  $\det(A + B)$  der Summe  $A + B$  aus den einzelnen Determinanten  $\det(A)$  und  $\det(B)$  bestimmen?

## Lineare Algebra I, SoSe 24 Blatt 11

---

### Fragenkatalog zu dem Abschnitt L19-L20 (nicht abzugeben):

- Was ist die Determinante einer Matrix?
- Welche Eigenschaften besitzen Determinanten von Matrizen?
- Wie lautet die Determinante einer  $(2 \times 2)$ -Matrix?
- Was besagt der Laplacesche Entwicklungssatz?
- Welche Rechenregeln gelten für Determinanten von Matrizen?
- Wie berechnet man explizit die Determinante einer Matrix?
- Wie bestimmt man die Inverse einer invertierbaren Matrix über die Determinante?
- Was besagt die Cramersche Regel?
- Was ist ein Eigenvektor eines Endomorphismus/einer quadratischen Matrix?
- Was ist ein Eigenwert eines Endomorphismus/einer quadratischen Matrix?
- Wie verhalten sich Eigenwerte bzgl. der Ähnlichkeitsrelation?
- Was kann man über Eigenvektoren verschiedener Eigenwerte aussagen?
- Wie viele Eigenwerte kann ein Endomorphismus eines  $n$ -dimensionalen Vektorraumes maximal besitzen?
- Was kann man über einen Endomorphismus eines  $n$ -dimensionalen Vektorraumes mit  $n$  verschiedenen Eigenwerten aussagen?
- Welche Matrixdarstellung erhält man durch eine Basis aus Eigenvektoren?
- Wann nennt man einen Endomorphismus diagonalisierbar?
- Wie kann man die Diagonalisierbarkeit eines Endomorphismus charakterisieren?
- Wie kann man Eigenwerte einer Matrix/eines Endomorphismus charakterisieren?
- Was ist das charakteristische Polynom einer Matrix/ eines Endomorphismus?

## Lineare Algebra I, SoSe 24

### Blatt 11

---

- Was ist eine alternative Definition des charakteristischen Polynomes einer Matrix/ eines Endomorphismus?
- Wie verhält sich das charakteristische Polynom einer Matrix bzgl. der Ähnlichkeitsrelation?
- Was kann man über die Koeffizienten charakteristischer Polynome aussagen?
- Wie verhält sich die Spur einer Matrix bzgl. der Ähnlichkeitsrelation?
- Was ist ein Eigenraum einer Matrix/eines Endomorphismus zu einem vorgegebenen Eigenwert?
- Wie diagonalisiert man eine Matrix?
- Können Sie für alle obigen Begriffe konkrete Beispiele/Gegenbeispiele angeben?

## Lineare Algebra I, SoSe 24

### Blatt 11

---

#### Einige generelle Tipps zur Bearbeitung von Übungsblättern:

- Beginnen Sie möglichst früh damit, sich mit den Aufgaben auseinanderzusetzen
- Machen Sie sich die exakte Bedeutung der verwendeten Begriffe und Definitionen durch Nachschlagen im Skript bewusst
- Manche Aufgaben können Sie (vermutlich) nur unter Zuhilfenahme von Resultaten aus der Vorlesung lösen, sodass Sie stets im Blick haben sollten, was Sie denn bereits über gegebene Objekte wissen
- Selbst wenn Sie eine Definition oder eine Aussage kennen, hilft es, sich diese mit Beispielen zu veranschaulichen
- Manche Aussagen lassen sich leichter per Widerspruchsbeweis oder per Kontraposition zeigen; versuchen Sie also ruhig verschiedene Ansätze
- Lassen Sie sich nicht zu sehr frustrieren, wenn Sie nicht alles auf Anhieb lösen können
- Sprechen Sie mit Anderen über die Aufgaben (sowohl Kommilitonen, Korrektor\*innen als auch Übungsgruppenleiter\*innen bieten sich dort zum Beispiel an)
- Suchen Sie nicht nach (vollständigen) Lösungen online (oder in Büchern etc.), da dies nur Ihr eigenes Verständnis bremst (auch das Versuchen und Scheitern an Problemen ist lehrreich, selbst wenn es erstmal nicht so scheint)
- Begründen Sie Ihre Antworten, außer wenn explizit dabei steht, dass Sie es nicht tun müssen
- Schreiben Sie Ihre Lösungen möglichst nicht als eine reine Folge von Symbolen auf, sondern verwenden Sie auch vollständige (deutsche oder englische) Sätze um Ihre Gedanken zu erklären