PD Dr. Karin Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Lineare Algebra I, SoSe 24
Blatt 12

Aufgabe 1:

Berechnen Sie die charakteristischen Polynome der folgenden reellen 3×3-Matrizen:

$$\text{(i)}\quad A_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(ii)}\quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{(ii)}\quad A_3 = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{2} & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{(iv)}\quad A_4 = \begin{pmatrix} -7 & 6 & 6 \\ -15 & 14 & 7 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{(v)}\quad A_5 = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 12 & -5 & -8 \\ -6 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2:

Zerlegen Sie das Polynom $f = 2T^5 - 11T^4 + 16T^3 + 2T^2 - 18T + 9 \in \mathbb{R}[T]$ in Linearfaktoren. Dafür müssen Sie zunächst Nullstellen erraten und diese dann anschließend per Polynomdivision abspalten.

Aufgabe 3:

Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrizen A_1, A_2 und A_3 aus Aufgabe 1. Was können Sie an dieser Stelle schon über die Diagonalisierbarkeit dieser drei Matrizen aussagen?

Aufgabe 4:

(i) Bestimmen Sie für diejenigen Matrizen, für welche sich die Frage nach der Diagonalisierbarkeit in Aufgabe 3 noch nicht geklärt hat, ob diese diagonalisierbar sind.

(ii) Diagonalisieren Sie nun alle Matrizen, welche nach Aufgabe 3 oder Aufgabe 4 (i) diagonalisierbar sind. Dazu gehört auch die Berechnung der Matrizen S und S^{-1}, welche die jeweilige Matrix A_i via $S^{-1}A_iS$ auf Diagonalform bringen.

PD Dr. Karin Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Lineare Algebra I, SoSe 24
Blatt 12

Fragenkatalog zu dem Abschnitt L21 (nicht abzugeben):

- Welche äquivalenten Bedingungen für die Diagonalisierbarkeit einer Matrix/eines Endomorphismus gibt es?
- Was kann man die Diagonalisierbarkeit einer Matrix/eines Endomorphismus an dem charakteristischen Polynom zusammen mit den Dimensionen der Eigenräumen ablesen?
- Was ist die geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes?
- Was ist die algebraische Vielfachheit eines Eigenwertes?
- Was kann man die Diagonalisierbarkeit einer Matrix/eines Endomorphismus über die geometrischen und algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte ausdrücken?
- Wann nennt man eine Matrix/einen Endomorphismus trigonalisierbar?
- Wie kann man die Trigonalisierbarkeit einer Matrix/eines Endomorphismus charakterisieren?
- Können Sie für alle obigen Begriffe konkrete Beispiele/Gegenbeispiele angeben?

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

PD Dr. Karin Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Lineare Algebra I, SoSe 24
Blatt 12

Einige generelle Tipps zur Bearbeitung von Übungsblättern:

- Beginnen Sie möglichst früh damit, sich mit den Aufgaben auseinanderzusetzen
- Machen Sie sich die exakte Bedeutung der verwendeten Begriffe und Definitionen durch Nachschlagen im Skript bewusst
- Manche Aufgaben können Sie (vermutlich) nur unter Zuhilfenahme von Resultaten aus der Vorlesung lösen, sodass Sie stets im Blick haben sollten, was Sie denn bereits über gegebene Objekte wissen
- Selbst wenn Sie eine Definition oder eine Aussage kennen, hilft es, sich diese mit Beispielen zu veranschaulichen
- Manche Aussagen lassen sich leichter per Widerspruchsbeweis oder per Kontraposition zeigen; versuchen Sie also ruhig verschiedene Ansätze
- Lassen Sie sich nicht zu sehr frustrieren, wenn Sie nicht alles auf Anhieb lösen können
- Sprechen Sie mit Anderen über die Aufgaben (sowohl Kommilitonen, Korrektor*innen als auch Übungsgruppenleiter*innen bieten sich dort zum Beispiel an)
- Suchen Sie nicht nach (vollständigen) Lösungen online (oder in Büchern etc.), da dies nur Ihr eigenes Verständnis bremst (auch das Versuchen und Scheitern an Problemen ist lehrreich, selbst wenn es erstmal nicht so scheint)
- Begründen Sie Ihre Antworten, außer wenn explizit dabei steht, dass Sie es nicht tun müssen
- Schreiben Sie Ihre Lösungen möglichst nicht als eine reine Folge von Symbolen auf, sondern verwenden Sie auch vollständige (deutsche oder englische) Sätze um Ihre Gedanken zu erklären