

Lineare Algebra I, SoSe 24 Blatt 2

Aufgabe 1:

Finden Sie die Anzahl der Elemente der folgenden Mengen:

- (i) $\{n \in \mathbb{N} \mid 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \leq 20\}$
- (ii) $\{\heartsuit, 1, 2, 3, 2, 1, \diamond\}$
- (iii) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$
- (iv) $\{1, 2, 12, \{1, 2\}\}$
- (v) $\{\{1, 2, 3\}, \{3, 2, 1\}\}$

Aufgabe 2:

Wir betrachten die Zahlen $a_1 = 4$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, $a_4 = 2$ und $a_5 = 1$ und setzen $b_0 = a_1$ und $b_{n+1} = a_{b_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Berechnen Sie b_5 und nutzen Sie diese Berechnung aus, um $b_{999999999}$ zu bestimmen.

Aufgabe 3:

Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie folgende Aussagen mit einer vollständigen Induktion über n :

- (i) Es gilt $\sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2$.
- (ii) Es gilt $\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
- (iii) Die Zahl $2^{3n} - 1$ ist durch 7 teilbar.

Aufgabe 4:

Seien X , Y und Z Mengen. Zeigen Sie:

- (i) $\mathcal{P}(X \cup Y) \supseteq \mathcal{P}(X) \cup \mathcal{P}(Y)$
- (ii) $\mathcal{P}(X \cap Y) = \mathcal{P}(X) \cap \mathcal{P}(Y)$
- (iii) $X \setminus (Y \cup Z) = (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z)$
- (iv) $X \setminus (Y \cap Z) = (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z)$

Gilt in Aufgabenteil (i) auch Gleichheit?

Lineare Algebra I, SoSe 24 Blatt 2

Fragenkatalog zu den Abschnitten L3-L4 (nicht abzugeben):

- Was ist eine Menge?
- Was sind die Elemente einer Menge?
- Wie gibt man an, dass ein Element x in einer Menge M enthalten/nicht enthalten ist?
- Auf welche Arten kann eine Menge beschrieben/angegeben werden?
- Was ist die Definition der Menge der natürlichen Zahlen dieser Vorlesung?
- Welche Menge wird mit \emptyset notiert?
- Was sind die Bezeichnungen der üblichen Zahlbereiche/Zahlmengen?
- Was ist der (Durch-)schnitt $A \cap B$ zweier Mengen A und B ?
- Was ist die Vereinigung $A \cup B$ zweier Mengen A und B ?
- Wann sind zwei Mengen A und B gleich?
- Was ist eine Teilmenge A einer Menge B ?
- Was ist die Differenz $A \setminus B$ zweier Mengen A und B ?
- Was ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ einer Menge A ?
- Wie beweist man einen Satz der Form $A \Rightarrow \exists x \in M: P(x)$?
- Wie beweist man einen Satz der Form $A \Rightarrow \forall x \in M: P(x)$?
- Wann nennt man zwei Mengen A und B disjunkt?
- Was ist eine echte Teilmenge A einer Menge B ?
- Wie funktioniert ein direkter Beweis?
- Wie funktioniert ein Kontrapositionsbeweis?
- Wie funktioniert ein Widerspruchsbeweis?
- Wie funktioniert ein Ringschluss?

Lineare Algebra I, SoSe 24 Blatt 2

- Wie widerlegt man eine Aussage der Form $A \Rightarrow \exists x \in M: P(x)$?
- Wie widerlegt man eine Aussage der Form $A \Rightarrow \forall x \in M: P(x)$?
- Wie funktioniert die vollständige Induktion?
- Können Sie für alle obigen Begriffe konkrete Beispiele/Gegenbeispiele angeben?

Lineare Algebra I, SoSe 24

Blatt 2

Einige generelle Tipps zur Bearbeitung von Übungsblättern:

- Beginnen Sie möglichst früh damit, sich mit den Aufgaben auseinanderzusetzen
- Machen Sie sich die exakte Bedeutung der verwendeten Begriffe und Definitionen durch Nachschlagen im Skript bewusst
- Manche Aufgaben können Sie (vermutlich) nur unter Zuhilfenahme von Resultaten aus der Vorlesung lösen, sodass Sie stets im Blick haben sollten, was Sie denn bereits über gegebene Objekte wissen
- Selbst wenn Sie eine Definition oder eine Aussage kennen, hilft es, sich diese mit Beispielen zu veranschaulichen
- Manche Aussagen lassen sich leichter per Widerspruchsbeweis oder per Kontraposition zeigen; versuchen Sie also ruhig verschiedene Ansätze
- Lassen Sie sich nicht zu sehr frustrieren, wenn Sie nicht alles auf Anhieb lösen können
- Sprechen Sie mit Anderen über die Aufgaben (sowohl Kommilitonen, Korrektor*innen als auch Übungsgruppenleiter*innen bieten sich dort zum Beispiel an)
- Suchen Sie nicht nach (vollständigen) Lösungen online (oder in Büchern etc.), da dies nur Ihr eigenes Verständnis bremst (auch das Versuchen und Scheitern an Problemen ist lehrreich, selbst wenn es erstmal nicht so scheint)
- Begründen Sie Ihre Antworten, außer wenn explizit dabei steht, dass Sie es nicht tun müssen
- Schreiben Sie Ihre Lösungen möglichst nicht als eine reine Folge von Symbolen auf, sondern verwenden Sie auch vollständige (deutsche oder englische) Sätze um Ihre Gedanken zu erklären