Heinrich Heine Universität Düsseldorf

PD Dr. Karin Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Lineare Algebra I, SoSe 24
Blatt 3

Aufgabe 1:

Wir betrachten die Menge $\mathcal{P}_2(X)$ der 2-elementigen Teilmengen von $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Auf dieser Menge definieren wir nun eine Relation R. Wir sagen, dass $A \in \mathcal{P}_2(X)$ in Relation zu $B \in \mathcal{P}_2(X)$ steht, wenn $A \cap B \neq \emptyset$ ist und die Summe der kleineren Zahl in A mit der größeren Zahl in B gerade ist. Listen Sie die 6 Elemente von $\mathcal{P}_2(X)$ wie folgt kreisförmig auf:

$$\{1,2\}$$

$$\{3,4\} \qquad\qquad \{1,3\}$$

$$\{2,4\} \qquad\qquad \{1,4\}$$

$$\{2,3\}$$

(i) Zeichnen Sie jeweils einen Pfeil von A nach B, wenn A in Relation zu B steht und visualisieren Sie somit die Relation R.

(ii) Überprüfen Sie die Relation R auf Reflexivität, Symmetrie und Transitivität. Ist R eine Äquivalenzrelation?

Aufgabe 2:

Folgende Vorschriften definieren keine Abbildungen. Erklären Sie jeweils, wieso dies so ist.

(i) $f_1 \colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto x^2$

(ii) $f_2 \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $2m \mapsto 2m$, wobei m eine ganze Zahl ist

(iii) $f_3 \colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$, $\frac{a}{b} \mapsto ab$, wobei $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{N}$

(iv) $f_4 \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto \max(\mathbb{N}_{>2n})$, wobei $\max(\mathbb{N}_{>2n})$ die größte natürliche Zahl ist, welche größer als $2n$ ist

(v) $f_5 \colon \mathbb{N}_0 \to \{f \colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N} \mid f \text{ ist eine Abbildung}\}$, $n \mapsto (m \mapsto nm)$

bitte wenden/scrollen

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

PD Dr. Karin Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Lineare Algebra I, SoSe 24
Blatt 3

Aufgabe 3:
Wir betrachten nun die Abbildung

$$f\colon \mathbb{Z} \cup \{\heartsuit\} \to \mathbb{N}_0 \cup \{🐬\}, n \mapsto \begin{cases} 2n, & \text{falls } n > 0 \\ 🐬, & \text{falls } n = \heartsuit \text{ oder } n = 0 \\ -2n, & \text{falls } n < 0 \end{cases}$$

(i) Bestimmen Sie das Bild der Abbildung f. Ist f surjektiv?

(ii) Bestimmen Sie die Kardinalität der Urbilder $f^{-1}(n)$ für $n \in \mathbb{N}_0 \cup \{🐬\}$. Ist die Abbildung f aufgefasst als Abbildung mit Wertebereich $f(\mathbb{Z} \cup \{\heartsuit\})$ injektiv?

(iii) Geben Sie eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{Z} \cup \{\heartsuit\}$ an, sodass $f|_M : M \to f(\mathbb{Z} \cup \{\heartsuit\})$ bijektiv wird.

Bemerkung: Für Ihre Lösungen dürfen Sie den Delfin natürlich etwas simplifizieren. Ein Strichmenschlein oder Ähnliches tut es auch.

Aufgabe 4:
Wir definieren auf der Menge $\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ eine Äquivalenzrelation $\sim$, indem wir A in Relation zu B setzen, wenn $|A| - |B|$ durch 3 teilbar ist.

(i) Bestimmen Sie alle Äquivalenzklassen bzgl. dieser Äquivalenzrelation.

(ii) Wir betrachten nun die Äquivalenzrelation

$$A \,\tilde{\sim}\, B, \text{ falls } |A| - |B| \text{ durch 3 teilbar ist}$$

auf der Menge $\mathcal{P}(\{1,2,3,4,5\})$. Das ist also dieselbe definierende Eigenschaft wie bei $\sim$, aber diesmal auf der Menge $\mathcal{P}(\{1,2,3,4,5\})$. Existiert eine Bijektion

$$f\colon \mathcal{P}(\{1,2,3,4\})/\sim \;\to \mathcal{P}(\{1,2,3,4,5\})/\tilde{\sim}?$$

(iii) Ändert sich in Aufgabenteil (ii) etwas, wenn wir in der Definition von $\tilde{\sim}$ die Teilbarkeit durch 3 durch Teilbarkeit durch 4 ersetzen?

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

PD Dr. Karin Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Lineare Algebra I, SoSe 24
Blatt 3

Fragenkatalog zu den Abschnitten L5-L6 (nicht abzugeben):

- Was ist ein Tupel (x, y)?
- Was ist das kartesische Produkt $X \times Y$ zweier Mengen X und Y?
- Was ist eine (n-stellige) Relation?
- Welche Eigenschaften von Relationen gibt es?
- Was ist eine Äquivalenzrelation?
- Was ist eine Ordnung(srelation)?
- Was ist eine lineare Ordnung(srelation)?
- Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge X. Was ist die Äquivalenzklasse $[x]$ eines Elementes $x \in X$ bzgl. $\sim$?
- Was ist die Quotientenmenge $X/\sim$ einer Menge X bzgl. einer Äquivalenzrelation $\sim$?
- Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge X. Was ist ein Repräsentant einer Äquivalenzklasse $[x]$?
- Sei X eine Menge. Was ist die Beziehung von Äquivalenzrelationen auf X und Partitionen der Menge X?
- Was ist eine Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen zwei Mengen X und Y?
- Was ist der Definitionsbereich einer Abbildung $f\colon X \to Y$?
- Was ist der Wertebereich einer Abbildung $f\colon X \to Y$?
- Wann sind zwei Abbildungen gleich?
- Was ist eine Einschränkung einer Abbildung $f\colon X \to Y$?
- Was ist eine Fortsetzung einer Abbildung $f\colon X \to Y$?
- Was ist das Bild $f(x)$ eines Elementes $x \in X$ unter einer Abbildung $f\colon X \to Y$?
- Was ist ein Urbild $f^{-1}(y)$ eines Elementes $y \in Y$ bzgl. einer Abbildung $f\colon X \to Y$?

bitte wenden/scrollen

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

PD Dr. Karin Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Lineare Algebra I, SoSe 24
Blatt 3

- Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Was ist das Bild $f(A)$ einer Teilmenge A von X unter einer Abbildung $f\colon X \to Y$?
- Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Was ist das Urbild $f^{-1}(B)$ einer Teilmenge B von Y bzgl. einer Abbildung $f\colon X \to Y$?
- Was ist das Bild einer Abbildung $f\colon X \to Y$?
- Welche Eigenschaften von Abbildungen/Abbildungstypen gibt es?
- Was ist die Komposition zweier Abbildungen $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$?
- Was ist die Identitätsabbildung id_X einer Menge X?
- Was ist ein Links- bzw. Rechtsinverses einer Abbildung $f\colon X \to Y$?
- Was ist eine Inverse/Umkehrabbildung einer Abbildung $f\colon X \to Y$?
- Wann existieren Links- bzw. Rechtsinverse einer Abbildung $f\colon X \to Y$?
- Wann existiert die Umkehrabbildung f^{-1} einer Abbildung $f\colon X \to Y$?
- Sei X eine Menge. Was ist die charakteristische Funktion χ_A eine Teilmenge A von X?
- Was ist eine Folge?
- Was ist eine Familie?
- Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge X. Was ist die kanonische Abbildung $X \to X/{\sim}$?
- Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge X und sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Wann gibt es eine von f induzierte Abbildung $\tilde{f}\colon X/{\sim} \to Y$ auf dem Quotienten $X/\sim$?
- Wann nennt man eine Menge X endlich/unendlich?
- Was ist die Kardinalität $|X|$ einer Menge X?
- Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Wann kann man aus den Kardinalitäten von X und Y folgern, dass f injektiv bzw. surjektiv ist?
- Seien X und Y Mengen mit $|X| = |Y|$. Wann ist eine Abbildung $f\colon X \to Y$ bijektiv?
- Können Sie für alle obigen Begriffe konkrete Beispiele/Gegenbeispiele angeben?

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

PD Dr. Karin Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Lineare Algebra I, SoSe 24
Blatt 3

Einige generelle Tipps zur Bearbeitung von Übungsblättern:

- Beginnen Sie möglichst früh damit, sich mit den Aufgaben auseinanderzusetzen
- Machen Sie sich die exakte Bedeutung der verwendeten Begriffe und Definitionen durch Nachschlagen im Skript bewusst
- Manche Aufgaben können Sie (vermutlich) nur unter Zuhilfenahme von Resultaten aus der Vorlesung lösen, sodass Sie stets im Blick haben sollten, was Sie denn bereits über gegebene Objekte wissen
- Selbst wenn Sie eine Definition oder eine Aussage kennen, hilft es, sich diese mit Beispielen zu veranschaulichen
- Manche Aussagen lassen sich leichter per Widerspruchsbeweis oder per Kontraposition zeigen; versuchen Sie also ruhig verschiedene Ansätze
- Lassen Sie sich nicht zu sehr frustrieren, wenn Sie nicht alles auf Anhieb lösen können
- Sprechen Sie mit Anderen über die Aufgaben (sowohl Kommilitonen, Korrektor*innen als auch Übungsgruppenleiter*innen bieten sich dort zum Beispiel an)
- Suchen Sie nicht nach (vollständigen) Lösungen online (oder in Büchern etc.), da dies nur Ihr eigenes Verständnis bremst (auch das Versuchen und Scheitern an Problemen ist lehrreich, selbst wenn es erstmal nicht so scheint)
- Begründen Sie Ihre Antworten, außer wenn explizit dabei steht, dass Sie es nicht tun müssen
- Schreiben Sie Ihre Lösungen möglichst nicht als eine reine Folge von Symbolen auf, sondern verwenden Sie auch vollständige (deutsche oder englische) Sätze um Ihre Gedanken zu erklären