Heinrich Heine Universität Düsseldorf

PD Dr. Karin Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Lineare Algebra I, SoSe 24
Blatt 4

Aufgabe 1:

(i) Stellen Sie folgende komplexe Zahlen in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ dar und berechnen Sie anschließend deren Absolutbeträge:

(a) $\frac{1}{3-i}$

(b) $(1+2i)^4$

(c) $\frac{2-i^{99}}{5i} + \frac{4}{i^9}$

(ii) Finden Sie für folgende Elemente aus dem endlichen Körper $\mathbb{F}_p$ einen Repräsentanten aus der Menge $\{0, \dots, p-1\}$:

(a) $\overline{-4}^2 - \overline{1}$, $p = 11$

(b) $\overline{5}^{-1} \cdot \overline{6}$, $p = 7$

(c) $\overline{100^{999999999}}$, $p = 101$

Aufgabe 2:

Wir betrachten das Polynom $f = -x^3 + 4x^2 - 5x + 2 \in \mathbb{R}[x]$, welches wir in Linearfaktoren zerlegen wollen.

(i) Rechnen Sie nach, dass die Zahl 1 eine Nullstelle von f ist.

(ii) Wenden Sie eine Polynomdivision an, um ein Polynom $g \in \mathbb{R}[x]$ mit $f = (x-1)g$ zu finden.

(iii) Bestimmen Sie die Nullstellen von g und geben Sie anschließend eine Zerlegung von f in Linearfaktoren an.

Aufgabe 3:

Für zwei reelle Zahlen a und b definieren wir die Abbildung

$$f_{a,b} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto ax + b.$$

(i) Zeigen Sie, dass die Verkettung von Abbildungen eine assoziative Verknüpfung auf der Menge $\mathrm{Agg}(\mathbb{R}) := \{f_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ definiert.

bitte wenden/scrollen

PD Dr. Karin Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Lineare Algebra I, SoSe 24
Blatt 4

(ii) Finden Sie ein neutrales Element $e \in \mathrm{Agg}(\mathbb{R})$ bezüglich der Verkettung von Abbildungen.

(iii) Auch die Menge $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}) := \{f_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ mit } a \neq 0\}$ bildet mit der Verkettung von Abbildungen eine Halbgruppe mit neutralem Element e (aus dem vorherigen Aufgabenteil). Das dürfen Sie ab jetzt verwenden ohne es selbst zu begründen. Zeigen Sie, dass genau eine der beiden Halbgruppen $(\mathrm{Agg}(\mathbb{R}), \circ)$ und $(\mathrm{Aff}(\mathbb{R}), \circ)$ eine Gruppe ist.

(iv) Ist die von Ihnen in Aufgabenteil (iii) gefundene Gruppe abelsch?

Aufgabe 4:

Für eine feste natürliche Zahl n setzen wir $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ und betrachten die Menge S_n aller Bijektionen von X nach X. In Symbolen also:

$$S_n = \{f\colon X \to X \mid f \text{ ist bijektiv}\}$$

Dann ist bildet S_n eine Gruppe mit der Verknüpfung von Abbildungen und der Identität id_X als neutrales Element (dies müssen Sie nicht nachweisen). Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussagen über S_n:

(i) Wir können auf S_2 eine Verknüpfung "$\star$" definieren, sodass $(S_2, \circ, \star)$ einen Körper bildet.

(ii) Die Gruppe $(S_n, \circ)$ ist abelsch.

(iii) Die Kardinalität von S_n beträgt $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.

(iv) Es gibt eine injektive Abbildung $f\colon S_n \to S_{n+1}$ mit $f(\sigma \circ \sigma') = f(\sigma) \circ f(\sigma')$ für alle $\sigma, \sigma' \in S_n$.

(v) Es gibt ein Element $\sigma \in S_n \setminus \{\mathrm{id}_X\}$ mit $\underbrace{\sigma \circ \ldots \circ \sigma}_{n \text{ mal}} = \mathrm{id}_X$.

PD Dr. Karin Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Lineare Algebra I, SoSe 24
Blatt 4

Fragenkatalog zu den Abschnitten L7-L8 (nicht abzugeben):

- Was ist eine Verknüpfung “$\cdot$” auf einer Menge H?
- Wann ist eine Verknüpfung “$\cdot$” auf einer Menge H assoziativ?
- Was ist eine Halbgruppe?
- Was ist ein neutrales Element bzgl. einer Verknüpfung “$\cdot$” auf einer Menge H?
- Was ist ein Monoid?
- Was ist eine kommutative/abelsche Halbgruppe?
- Was ist eine kürzbare Halbgruppe?
- Was ist eine Gruppe?
- Sind Gruppen stets kürzbar?
- Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Was ist das Inverse g^{-1} eines Elementes $g \in G$?
- Was ist ein Ring?
- Welche Rechenregeln gelten in Ringen?
- Was ist ein kommutativer Ring?
- Was ist eine Einheit eines Ringes R?
- Was ist die Einheitengruppe $R^\times$ eines Ringes R?
- Was ist ein Körper?
- Was ist der Restklassenring $\mathbb{Z}/n$?
- Wann sind zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ kongruent mod einer ganzen Zahl n?
- Was ist eine Primzahl?
- Wann ist der Restklassenring $\mathbb{Z}/n$ ein Körper?
- Was ist der Körper $\mathbb{F}_p$?

bitte wenden/scrollen

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

PD Dr. Karin Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Lineare Algebra I, SoSe 24
Blatt 4

- Wie konstruiert man die Zahlbereiche $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ aus $\mathbb{N}_0$?
- Was ist eine axiomatische Charakterisierung der reellen Zahlen?
- Was ist ein angeordneter Körper?
- Was ist der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen?
- Was ist der Realteil/Imaginärteil einer komplexen Zahl?
- Wie visualisiert man komplexe Zahlen?
- Wie fasst man $\mathbb{R}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$ auf?
- Was ist ein Körperisomorphismus?
- Wie lässt sich jede komplexe Zahl z schreiben?
- Was ist die imaginäre Einheit $i \in \mathbb{C}$?
- Was ist die zu $z \in \mathbb{C}$ komplex konjugierte Zahl $\overline{z}$?
- Was ist der Betrag $|z|$ einer komplexen Zahl z?
- Was ist ein Polynom über einem Körper K?
- Was ist ein Monom über einem Körper K?
- Was ist das Nullpolynom?
- Was ist der Grad eines Polynomes f über einem Körper K?
- Was ist der Leitkoeffizient eines Polynomes f über einem Körper K?
- Wann nennt man ein Polynom f über einem Körper K normiert?
- Was ist der Polynomring $K[x]$ für einen Körper K?
- Was ist die durch ein Polynom $f \in K[x]$ gegebene Polynomfunktion?
- Seien $f, g \in K[x]$. Was ist die Polynomdivision von f bzgl. g?
- Was ist eine Nullstelle eines Polynomes $f \in K[x]$?

bitte wenden/scrollen

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

PD Dr. Karin Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Lineare Algebra I, SoSe 24
Blatt 4

- Wie spaltet man Nullstellen eines Polynomes $K[x]$ ab?
- Was besagt der Fundamentalsatz der Algebra?
- Was ist ein Linearfaktor eines Polynomes $f \in K[x]$?
- Wie kann man den Körper $\mathbb{C}$ alternativ konstruieren?
- Können Sie für alle obigen Begriffe konkrete Beispiele/Gegenbeispiele angeben?

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

PD Dr. Karin Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Lineare Algebra I, SoSe 24
Blatt 4

Einige generelle Tipps zur Bearbeitung von Übungsblättern:

- Beginnen Sie möglichst früh damit, sich mit den Aufgaben auseinanderzusetzen
- Machen Sie sich die exakte Bedeutung der verwendeten Begriffe und Definitionen durch Nachschlagen im Skript bewusst
- Manche Aufgaben können Sie (vermutlich) nur unter Zuhilfenahme von Resultaten aus der Vorlesung lösen, sodass Sie stets im Blick haben sollten, was Sie denn bereits über gegebene Objekte wissen
- Selbst wenn Sie eine Definition oder eine Aussage kennen, hilft es, sich diese mit Beispielen zu veranschaulichen
- Manche Aussagen lassen sich leichter per Widerspruchsbeweis oder per Kontraposition zeigen; versuchen Sie also ruhig verschiedene Ansätze
- Lassen Sie sich nicht zu sehr frustrieren, wenn Sie nicht alles auf Anhieb lösen können
- Sprechen Sie mit Anderen über die Aufgaben (sowohl Kommilitonen, Korrektor*innen als auch Übungsgruppenleiter*innen bieten sich dort zum Beispiel an)
- Suchen Sie nicht nach (vollständigen) Lösungen online (oder in Büchern etc.), da dies nur Ihr eigenes Verständnis bremst (auch das Versuchen und Scheitern an Problemen ist lehrreich, selbst wenn es erstmal nicht so scheint)
- Begründen Sie Ihre Antworten, außer wenn explizit dabei steht, dass Sie es nicht tun müssen
- Schreiben Sie Ihre Lösungen möglichst nicht als eine reine Folge von Symbolen auf, sondern verwenden Sie auch vollständige (deutsche oder englische) Sätze um Ihre Gedanken zu erklären