Heinrich Heine Universität Düsseldorf

PD Dr. Karin Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Lineare Algebra I, SoSe 24
Blatt 5

Aufgabe 1:
Handelt es sich bei den folgenden Teilmengen um Untervektorräume?

(i) $U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$

(ii) $U_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$

(iii) $U_3 = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid f(0) = 7\} \subseteq \mathbb{R}[x]$

(iv) $U_4 = \{f \in \mathbb{C}[x] \mid \deg(f) \leq 2\} \subseteq \mathbb{C}[x]$

(v) $U_5 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(x) = f(-x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Aufgabe 2:

(i) Überprüfen Sie die Vektoren $(\overline{8}, \overline{2}, \overline{13}), (\overline{1}, \overline{6}, \overline{2}), (\overline{2}, \overline{3}, \overline{0}) \in \mathbb{F}_5^3$ auf lineare Unabhängigkeit.

(ii) Für welche Zahlen $a \in \mathbb{R}$ sind $x^2 + 2x + 1, 2x^2 - x, ax^2 - 1 \in \mathbb{R}[x]$ linear unabhängig?

(iii) Zeigen Sie, dass die Vektoren $(1, 1, 1), (x, y, z), (x^2, y^2, z^2) \in \mathbb{R}^3$ für paarweise verschiedene reelle Zahlen x, y und z linear unabhängig ist.

Aufgabe 3:
Sei K ein Körper. Für zwei Elemente $a, b \in K$ betrachten wir die rekursiv definierte Abbildung $\mathrm{fib}_{a,b} \colon \mathbb{N}_0 \to K$ gegeben durch $\mathrm{fib}_{a,b}(0) = a$, $\mathrm{fib}_{a,b}(1) = b$ und

$$\mathrm{fib}_{a,b}(n + 2) = \mathrm{fib}_{a,b}(n + 1) + \mathrm{fib}_{a,b}(n)$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(i) Finden Sie eine geeignete Addition "$\oplus$" und Skalarmultiplikation "$\circledcirc$", welche die Menge $\mathrm{Fib}(K) = \{\mathrm{fib}_{a,b} \mid a, b \in K\}$ zu einem K-Vektorraum macht.

(ii) Wie viele Elemente hat der Vektorraum $\mathrm{Fib}(\mathbb{F}_p)$?

(iii) Visualisieren Sie $\mathrm{Fib}(\mathbb{F}_2)$ und $\mathrm{Fib}(\mathbb{F}_3)$.

bitte wenden/scrollen

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

PD Dr. Karin Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Lineare Algebra I, SoSe 24
Blatt 5

Aufgabe 4: Sei V ein K-Vektorraum. Zeigen oder widerlegen Sie:

(i) Jeder Untervektorraum U von V ist die lineare Hülle einer Teilmenge $A \subseteq V$.

(ii) Sind $v, w \in V \setminus \{0\}$ mit $v \in \langle w \rangle$, so gilt auch $w \in \langle v \rangle$.

(iii) Sind $v, w \in V$ mit $\langle v \rangle \subsetneq \langle v, w \rangle \supsetneq \langle w \rangle$, so ist auch $\langle (v, w) \rangle \subsetneq \langle (v, w), (w, v) \rangle \supsetneq \langle (w, v) \rangle$ innerhalb von V^2.

(iv) Für alle Teilmengen A und B von V gilt $\langle A \cap B \rangle = \langle A \rangle \cap \langle B \rangle$.

(v) Sind A und B Teilmengen mit $\langle A \cup B \rangle = \langle A \rangle \cup \langle B \rangle$, so gilt $\langle A \rangle \subseteq \langle B \rangle$ oder $\langle B \rangle \subseteq \langle A \rangle$.

Bemerkung: Hier bezeichnet "$\langle - \rangle$" stets die lineare Hülle aus Kapitel L9 aus der Vorlesung.

PD Dr. Karin Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Lineare Algebra I, SoSe 24
Blatt 5

Fragenkatalog zu den Abschnitten L9-L10 (nicht abzugeben):

- Was ist ein Vektorraum über einem Körper K?
- Was ist ein Vektor?
- Was ist ein Skalar?
- Was ist der Standardvektorraum K^n?
- Wie fasst man den Polynomring $K[x]$ als Vektorraum auf?
- Auf welche Weise wird das kartesische Produkt $V_1 \times \ldots \times V_n$ von Vektorräumen $V_1, \ldots, V_n$ zu einem Vektorraum?
- Welche Rechenregeln gelten in Vektorräumen?
- Was ist ein Untervektorraum U eines Vektorraumes V?
- Sind Schnitte von Untervektorräumen erneut Untervektorräume?
- Sind Summen von Untervektorräumen erneut Untervektorräume?
- Sind Vereinigungen von Untervektorräumen erneut Untervektorräume?
- Sind Produkte von Untervektorräumen erneut Untervektorräume?
- Was ist eine Linearkombination von Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ eines Vektorraumes V?
- Was ist die lineare Hülle/der Span $\langle A \rangle$ einer Teilmenge A eines Vektorraumes V?
- Wie kann man lineare Hüllen alternativ beschreiben?
- Was ist ein Erzeugendensystem eines Vektorraumes?
- Welche Eigenschaften haben lineare Hüllen?
- Wann nennt man ein Tupel $(v_1, \ldots, v_n)$ von Vektoren eines Vektorraumes V linear unabhängig/abhängig?
- Wie reduziert man die Überprüfung der linearen Unabhängigkeit in einem beliebigen Vektorraum auf die Überprüfung der linearer Unabhängigkeit im Standardvektorraum K^n?

bitte wenden/scrollen

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

PD Dr. Karin Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Lineare Algebra I, SoSe 24
Blatt 5

- Was ist ein lineares Gleichungssystem?
- Wann nennt man ein lineares Gleichungssystem homogen/inhomogen?
- Was ist die Lösungsstrategie für lineare Gleichungssysteme?
- Was sind die elementaren Zeilenoperationen/Zeilenumformungen?
- Wie schreibt man lineare Gleichungssysteme auf?
- Wann ein homogenes lineares Gleichungssystem definitiv eine nicht-triviale Lösung?
- Wann nennt man eine Teilmenge A eines Vektorraumes V linear unabhängig/abhängig?
- Was ist die Beziehung zwischen linearen Hüllen und linearer Unabhängigkeit/Abhängigkeit?
- Können Sie für alle obigen Begriffe konkrete Beispiele/Gegenbeispiele angeben?

PD Dr. Karin Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Lineare Algebra I, SoSe 24
Blatt 5

Einige generelle Tipps zur Bearbeitung von Übungsblättern:

- Beginnen Sie möglichst früh damit, sich mit den Aufgaben auseinanderzusetzen
- Machen Sie sich die exakte Bedeutung der verwendeten Begriffe und Definitionen durch Nachschlagen im Skript bewusst
- Manche Aufgaben können Sie (vermutlich) nur unter Zuhilfenahme von Resultaten aus der Vorlesung lösen, sodass Sie stets im Blick haben sollten, was Sie denn bereits über gegebene Objekte wissen
- Selbst wenn Sie eine Definition oder eine Aussage kennen, hilft es, sich diese mit Beispielen zu veranschaulichen
- Manche Aussagen lassen sich leichter per Widerspruchsbeweis oder per Kontraposition zeigen; versuchen Sie also ruhig verschiedene Ansätze
- Lassen Sie sich nicht zu sehr frustrieren, wenn Sie nicht alles auf Anhieb lösen können
- Sprechen Sie mit Anderen über die Aufgaben (sowohl Kommilitonen, Korrektor*innen als auch Übungsgruppenleiter*innen bieten sich dort zum Beispiel an)
- Suchen Sie nicht nach (vollständigen) Lösungen online (oder in Büchern etc.), da dies nur Ihr eigenes Verständnis bremst (auch das Versuchen und Scheitern an Problemen ist lehrreich, selbst wenn es erstmal nicht so scheint)
- Begründen Sie Ihre Antworten, außer wenn explizit dabei steht, dass Sie es nicht tun müssen
- Schreiben Sie Ihre Lösungen möglichst nicht als eine reine Folge von Symbolen auf, sondern verwenden Sie auch vollständige (deutsche oder englische) Sätze um Ihre Gedanken zu erklären