Heinrich Heine Universität Düsseldorf

PD Dr. Karin Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Lineare Algebra I, SoSe 24
Blatt 6

Aufgabe 1:
Wir betrachten die drei Vektoren

$$v_1 = (1, 1, 0, 0), \quad v_2 = (1, -2, 1, 3), \quad v_3 = (1, 0, 1, 1) \in \mathbb{R}^4.$$

(i) Zeigen Sie, dass das Tupel (v_1, v_2, v_3) linear unabhängig ist.

(ii) Finden Sie einen Vektor $v_4 \in \mathbb{R}^4$ so, dass (v_1, v_2, v_3, v_4) eine Basis von $\mathbb{R}^4$ ist.

Aufgabe 2:

(i) Die Einschränkung der üblichen Skalarmultiplikation $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ auf die Menge $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ macht $\mathbb{C}$ zu einem $\mathbb{R}$-Vektorraum. Was ist die Dimension des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\mathbb{C}$?

(ii) Sei K ein Körper. Was ist die Dimension des Untervektorraumes $\{f \in K[T] \mid \deg(f) \leq 2\}$ von $K[T]$?

(iii) Die Menge $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ ist ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum vermöge

$$(a + b\sqrt{3}) + (c + d\sqrt{3}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{3} \quad \text{und} \quad \lambda \cdot (a + b\sqrt{3}) = \lambda a + \lambda b\sqrt{3}.$$

Was ist die Dimension von $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$?

Aufgabe 3: Sei V ein Vektorraum und seien $v_1, \ldots, v_n \in V$. Zeigen oder widerlegen Sie:

(i) Sind v_1 und v_2 linear abhängig, so existiert $v \in V$ mit $v_1, v_2 \in \langle v \rangle$.

(ii) Sind (v_1, v_2) und (v_2, v_3) linear abhängig, so auch (v_1, v_3), falls $v_2 \neq 0$.

(iii) Sind (v_1, v_2) und (v_2, v_3) linear abhängig, so auch (v_1, v_3).

(iv) Ist $(v_1, \ldots, v_n)$ linear unabhängig, so bildet es eine Basis von $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$.

(v) Sind $v_1, \ldots, v_n$ linear abhängig, so ist $v_n \in \langle v_1, \ldots, v_{n-1} \rangle_K$ oder $v_1, \ldots, v_{n-1}$ sind linear unabhängig.

bitte wenden/scrollen

PD Dr. Karin Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Lineare Algebra I, SoSe 24
Blatt 6

Aufgabe 4: Bestimmen Sie die Anzahl der 1-dimensionalen Untervektorräume von $\mathbb{F}_p^n$. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Überlegen Sie sich, wie viele Elemente der Vektorraum $\mathbb{F}_p^n$ hat.

(ii) Welche dieser Vektoren treten als Basis eines 1-dimensionalen Untervektorraumes von $\mathbb{F}_p^n$ auf? Wie viele Vektoren sind das?

(iii) Wie viele verschiedene Basen hat ein fixer 1-dimensionaler Untervektorraum von $\mathbb{F}_p^n$?

(iv) Berechnen Sie nun die Anzahl der 1-dimensionalen Untervektorräume von $\mathbb{F}_p^n$.

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

PD Dr. Karin Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Lineare Algebra I, SoSe 24
Blatt 6

Fragenkatalog zu dem Abschnitt L11 (nicht abzugeben):

- Was ist eine Basis eine Vektorraumes V?
- Was ist die Standardbasis des Standardvektorraumes K^n?
- Welche wichtigen Sätze über Basen von Vektorräumen gibt es?
- Besitzt jeder Vektorraum eine Basis?
- In welchem Zusammenhang stehen die Kardinalitäten der Basen eines Vektorraumes?
- Was besagt der Basisergänzungssatz?
- Was besagt der Austauschsatz von Steinitz?
- Was ist die Dimension eines Vektorraumes V?
- Was ist die Dimension des Standardvektorraumes K^n?
- Was nennt man einen Vektorraum endlich-dimensional/unendlich-dimensional?
- Wann nennt man einen Vektorraum endlich erzeugt?
- Wie kann man Basen von Vektorräumen charakterisieren?
- Können Sie für alle obigen Begriffe konkrete Beispiele/Gegenbeispiele angeben?

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

PD Dr. Karin Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Lineare Algebra I, SoSe 24
Blatt 6

Einige generelle Tipps zur Bearbeitung von Übungsblättern:

- Beginnen Sie möglichst früh damit, sich mit den Aufgaben auseinanderzusetzen
- Machen Sie sich die exakte Bedeutung der verwendeten Begriffe und Definitionen durch Nachschlagen im Skript bewusst
- Manche Aufgaben können Sie (vermutlich) nur unter Zuhilfenahme von Resultaten aus der Vorlesung lösen, sodass Sie stets im Blick haben sollten, was Sie denn bereits über gegebene Objekte wissen
- Selbst wenn Sie eine Definition oder eine Aussage kennen, hilft es, sich diese mit Beispielen zu veranschaulichen
- Manche Aussagen lassen sich leichter per Widerspruchsbeweis oder per Kontraposition zeigen; versuchen Sie also ruhig verschiedene Ansätze
- Lassen Sie sich nicht zu sehr frustrieren, wenn Sie nicht alles auf Anhieb lösen können
- Sprechen Sie mit Anderen über die Aufgaben (sowohl Kommilitonen, Korrektor*innen als auch Übungsgruppenleiter*innen bieten sich dort zum Beispiel an)
- Suchen Sie nicht nach (vollständigen) Lösungen online (oder in Büchern etc.), da dies nur Ihr eigenes Verständnis bremst (auch das Versuchen und Scheitern an Problemen ist lehrreich, selbst wenn es erstmal nicht so scheint)
- Begründen Sie Ihre Antworten, außer wenn explizit dabei steht, dass Sie es nicht tun müssen
- Schreiben Sie Ihre Lösungen möglichst nicht als eine reine Folge von Symbolen auf, sondern verwenden Sie auch vollständige (deutsche oder englische) Sätze um Ihre Gedanken zu erklären