Heinrich Heine Universität Düsseldorf

PD Dr. Karin Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Lineare Algebra I, SoSe 24
Blatt 7

Aufgabe 1: Überprüfen Sie die folgenden Abbildungen auf Linearität:

(i) $\varphi_1 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (x + y, 2y, -3x - 3y)$

(ii) $\varphi_2 \colon \mathbb{F}_7^3 \to \mathbb{F}_7^2$, $(x, y, z) \mapsto (\overline{4}x - y, \overline{1} + x + z)$

(iii) $\varphi_3 \colon \mathbb{Q}[T] \to \mathbb{Q}$, $f \mapsto f(2)$

(iv) $\varphi_4 \colon \mathbb{R}[T]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[T]_{\leq 2}$, $a_2T^2 + a_1T + a_0 \mapsto 2T + a_1$, wobei $\mathbb{R}[T]_{\leq 2}$ der Vektorraum aller reellen Polynome f mit $\deg(f) \leq 2$ ist.

(v) $\varphi_5 \colon \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$, $f \mapsto (n \mapsto f(n) + f(-n))$

Aufgabe 2:
Sei V ein Vektorraum und seien U_1 und U_2 Untervektorräume von V. Dann gilt die Formel

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2)$$

nach Satz 12.3. Ist nun ein weiterer Untervektorraum U_3 gegeben, so könnte man auf die Idee kommen, dass

$$\begin{aligned}\dim(U_1 + U_2 + U_3) = {} & \dim(U_1) + \dim(U_2) + \dim(U_3) \\ & - \dim(U_1 \cap U_2) - \dim(U_1 \cap U_3) - \dim(U_2 \cap U_3) \\ & + \dim(U_1 \cap U_2 \cap U_3)\end{aligned}$$

gelten sollte. Zeigen Sie, dass diese Formel im Allgemeinen nicht stimmt, indem Sie ein Gegenbeispiel konstruieren.

Aufgabe 3:
Bestimmen Sie jeweils, ob es keine, eine oder mehrere lineare Abbildungen $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit den folgenden Eigenschaften gibt:

(i) $f((3, -1)) = (0, 2)$, $f((2, 0)) = (1, 1)$

(ii) f ist nicht injektiv und $f((3, -1)) = (1, 0)$

(iii) f ist surjektiv und $f(\{(1, x) \mid x \in \mathbb{R}\})$ ist einelementig

bitte wenden/scrollen

PD Dr. Karin Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Lineare Algebra I, SoSe 24
Blatt 7

(iv) $f(\{(x^2, x^3) \mid x \in \mathbb{R}\}) = \{(1, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

(v) $f((2, 2)) = (2, 0)$, $f((1, 3)) = (1, 1)$ und $f((-1, -7)) \neq (-1, -3)$

Aufgabe 4:
Seien V und W Vektorräume über einem Körper K und sei zudem $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie:

(i) Es gilt $f(-v) = -f(v)$ für alle $v \in V$.

(ii) Ist f bijektiv, so ist auch die Umkehrabbildung f^{-1} linear.

(iii) Ist $V = W$ und ist $f \circ f = f$, so ist $\operatorname{im}(f)$ ein Komplement von $\ker(f)$.

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

PD Dr. Karin Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Lineare Algebra I, SoSe 24
Blatt 7

Fragenkatalog zu dem Abschnitt L12-L13 (nicht abzugeben):

- Welche Werte kann die Dimension eines Untervektorraumes $U \subseteq V$ annehmen, wenn V ein n-dimensionaler Vektorraum ist?
- Sei U ein Untervektorraum eines Vektorraumes V. Wann ist $\dim(U) = \dim(V)$?
- Was besagt die Dimensionsformel für Summen von Untervektorräumen?
- Was ist die direkte Summe $U_1 \oplus \ldots \oplus U_r$ von Untervektorräumen $U_1, \ldots, U_r$ eines Vektorraumes V?
- Wie kann man direkte Summen von Untervektorräumen charakterisieren?
- Sei U ein Untervektorraum eines Vektorraumes V. Was ist ein Komplement von U?
- Existieren Komplemente stets?
- Sei V ein Vektorraum. Was ist der Quotientenvektorraum V/U von V bzgl. eines Untervektorraumes U?
- Wie kann man eine Basis eines Quotientenvektorraumes V/U finden?
- Was ist ist Dimension eines Quotientenvektorraumes V/U?
- Was ist eine lineare Abbildung zwischen zwei Vektorräumen?
- Wohin bildet eine lineare Abbildung den Nullvektor ab?
- Was ist ein Monomorphismus zwischen zwei Vektorräumen?
- Was ist ein Epimorphismus zwischen zwei Vektorräumen?
- Was ist ein Isomorphismus zwischen zwei Vektorräumen?
- Was ist ein Endomorphismus eines Vektorraumes?
- Was ist ein Automorphismus eines Vektorraumes?
- Wie gibt man eine lineare Abbildung vermöge einer Basis des Definitionsbereiches an?
- Was ist der Kern einer linearen Abbildung?
- Welche Struktur besitzen das Bild und der Kern einer linearen Abbildung?

bitte wenden/scrollen

Heinrich Heine
Universität
Düsseldorf

PD Dr. Karin Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Lineare Algebra I, SoSe 24
Blatt 7

- Wie kann man die Injektivität einer linearen Abbildung charakterisieren?
- Was besagt der Rangsatz?
- Was besagt der Isomorphiesatz/Homomorphiesatz?
- Wie viele Vektorräume einer festen endlichen Dimension gibt es bis auf Isomorphie? Wie sehen diese aus?
- Sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei endlich-dimensionalen Vektorräumen. In welchem Zusammenhang stehen die Injektivität und die Surjektivität von f mit den Dimensionen von V und W?
- Welche Eigenschaften respektiert ein Isomorphismus von Vektorräumen?
- Können Sie für alle obigen Begriffe konkrete Beispiele/Gegenbeispiele angeben?

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

PD Dr. Karin Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Lineare Algebra I, SoSe 24
Blatt 7

Einige generelle Tipps zur Bearbeitung von Übungsblättern:

- Beginnen Sie möglichst früh damit, sich mit den Aufgaben auseinanderzusetzen
- Machen Sie sich die exakte Bedeutung der verwendeten Begriffe und Definitionen durch Nachschlagen im Skript bewusst
- Manche Aufgaben können Sie (vermutlich) nur unter Zuhilfenahme von Resultaten aus der Vorlesung lösen, sodass Sie stets im Blick haben sollten, was Sie denn bereits über gegebene Objekte wissen
- Selbst wenn Sie eine Definition oder eine Aussage kennen, hilft es, sich diese mit Beispielen zu veranschaulichen
- Manche Aussagen lassen sich leichter per Widerspruchsbeweis oder per Kontraposition zeigen; versuchen Sie also ruhig verschiedene Ansätze
- Lassen Sie sich nicht zu sehr frustrieren, wenn Sie nicht alles auf Anhieb lösen können
- Sprechen Sie mit Anderen über die Aufgaben (sowohl Kommilitonen, Korrektor*innen als auch Übungsgruppenleiter*innen bieten sich dort zum Beispiel an)
- Suchen Sie nicht nach (vollständigen) Lösungen online (oder in Büchern etc.), da dies nur Ihr eigenes Verständnis bremst (auch das Versuchen und Scheitern an Problemen ist lehrreich, selbst wenn es erstmal nicht so scheint)
- Begründen Sie Ihre Antworten, außer wenn explizit dabei steht, dass Sie es nicht tun müssen
- Schreiben Sie Ihre Lösungen möglichst nicht als eine reine Folge von Symbolen auf, sondern verwenden Sie auch vollständige (deutsche oder englische) Sätze um Ihre Gedanken zu erklären