Heinrich Heine Universität Düsseldorf

PD Dr. Karin Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Lineare Algebra I, SoSe 24
Blatt 8

Aufgabe 1:

Gegeben seien die folgenden reellen Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(i) Geben Sie an, welche der neun Matrixprodukte $AA, AB, AC, BA, BB, BC, CA, CB, CC$ laut Vorlesung definiert sind.

(ii) Berechnen Sie all die definierten Matrixprodukte des vorherigen Aufgabenteils.

Aufgabe 2:

Wir betrachten die lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (x - 2y + z, 3x - z)$. Berechnen Sie die darstellende Matrix von f bezüglich der Basen $((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$ und $((1, -1), (1, 1))$ von $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 3:

Sei V ein Vektorraum und seien U und W Untervektorräume von V mit $U \subseteq W$.

(i) Weisen Sie nach, dass W/U ein Untervektorraum von V/U ist.

(ii) Zeigen Sie, dass der Kern der linearen Abbildung $V \to (V/U)/(W/U)$, $v \mapsto (v+U)+W/U$ durch W gegeben ist.

(iii) Folgern Sie mit Hilfe des Isomorphiesatzes, dass V/W isomorph zu $(V/U)/(W/U)$ ist.

Aufgabe 4:

Sei V ein Vektorraum und seien U und W Untervektorräume von V. Gehen Sie analog zu Aufgabe 3 vor, um zu zeigen, dass $U/(U \cap W)$ isomorph zu $(U + W)/W$ ist.

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

PD Dr. Karin Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Lineare Algebra I, SoSe 24
Blatt 8

Fragenkatalog zu dem Abschnitt L14-L15 (nicht abzugeben):

- Was ist eine Matrix?
- Wie ist der Vektorraum $K^{m\times n}$ der $(m \times n)$-Matrizen definiert?
- Was ist eine quadratische Matrix?
- Was ist eine Diagonalmatrix?
- Wie und wann ist das Matrixprodukt zweier Matrizen definiert?
- Ist die Matrixmultiplikation kommutativ?
- Was ist die Einheitsmatrix?
- Was ist die Nullmatrix?
- Was ist eine obere Dreiecksmatrix?
- Welche Rechenregeln für Matrizen gibt es?
- Was ist der Zusammenhang zwischen Matrizen und linearen Abbildungen $K^n \to K^m$?
- Sei V ein Vektorraum mit Basis $(v_1, \ldots, v_n)$. Was ist die Koordinatenabbildung $V \to K^n$ bezüglich der obigen Basis?
- Wie beschreibt man eine beliebige lineare Abbildung $f\colon V \to W$ zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen durch eine Matrix?
- Sind Verkettungen linearer Abbildungen linear?
- Ist die Umkehrabbildung einer linearen Abbildung, sofern sie existiert, auch linear?
- Sind Summen linearer Abbildungen linear?
- Was besagt Sylvesters Rangsatz?
- Was ist der Vektorraum $\mathrm{Hom}(V, W)$ für zwei Vektorräume V und W?
- Was ist die Endomorphismenalgebra $\mathrm{End}(V)$ eines Vektorraumes V?
- Was ist die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(V)$ eines Vektorraumes V?

bitte wenden/scrollen

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

PD Dr. Karin Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Lineare Algebra I, SoSe 24
Blatt 8

- Was ist die Dimension des Vektorraumes $\mathrm{Hom}(V, W)$ für zwei Vektorräume endlich-dimensionale Vektorräume V und W?
- Warum ist die Matrixmultiplikation so definiert wie sie ist?
- Was ist die Inverse A^{-1} einer Matrix $A \in K^{n\times n}$?
- Was ist der Dualraum V^* eines Vektorraumes V?
- Was ist die Spurabbildung?
- Was ist die zu einer Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ eines Vektorraumes V duale Basis?
- Was ist die transponierte Abbildung $f^T : W^* \to V^*$ einer linearen Abbildung $f : V \to W$?
- Welche Rechenregeln für transponierte Abbildungen gibt es?
- Wie transponiert man eine Matrix?
- Können Sie für alle obigen Begriffe konkrete Beispiele/Gegenbeispiele angeben?

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

PD Dr. Karin Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Lineare Algebra I, SoSe 24
Blatt 8

Einige generelle Tipps zur Bearbeitung von Übungsblättern:

- Beginnen Sie möglichst früh damit, sich mit den Aufgaben auseinanderzusetzen
- Machen Sie sich die exakte Bedeutung der verwendeten Begriffe und Definitionen durch Nachschlagen im Skript bewusst
- Manche Aufgaben können Sie (vermutlich) nur unter Zuhilfenahme von Resultaten aus der Vorlesung lösen, sodass Sie stets im Blick haben sollten, was Sie denn bereits über gegebene Objekte wissen
- Selbst wenn Sie eine Definition oder eine Aussage kennen, hilft es, sich diese mit Beispielen zu veranschaulichen
- Manche Aussagen lassen sich leichter per Widerspruchsbeweis oder per Kontraposition zeigen; versuchen Sie also ruhig verschiedene Ansätze
- Lassen Sie sich nicht zu sehr frustrieren, wenn Sie nicht alles auf Anhieb lösen können
- Sprechen Sie mit Anderen über die Aufgaben (sowohl Kommilitonen, Korrektor*innen als auch Übungsgruppenleiter*innen bieten sich dort zum Beispiel an)
- Suchen Sie nicht nach (vollständigen) Lösungen online (oder in Büchern etc.), da dies nur Ihr eigenes Verständnis bremst (auch das Versuchen und Scheitern an Problemen ist lehrreich, selbst wenn es erstmal nicht so scheint)
- Begründen Sie Ihre Antworten, außer wenn explizit dabei steht, dass Sie es nicht tun müssen
- Schreiben Sie Ihre Lösungen möglichst nicht als eine reine Folge von Symbolen auf, sondern verwenden Sie auch vollständige (deutsche oder englische) Sätze um Ihre Gedanken zu erklären