

Lineare Algebra I, SoSe 24

Blatt 9

Aufgabe 1:

Berechnen Sie den Rang der linearen Abbildung $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x + 2y, y - z, x + z)$.

Aufgabe 2:

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^{2 \times 2}$ die Teilmenge, welche aus Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$$

besteht, wobei $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass A mit der üblichen Addition und Multiplikation von Matrizen einen Körper bildet.

Aufgabe 3:

Seien $f: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ lineare Abbildungen mit $\text{rg}(f) = 2 = \text{rg}(g)$.

- (i) Bestimmen Sie mit Hilfe von Sylversters Rangsatz welche Ränge für $g \circ f$ in Frage kommen.
- (ii) Geben Sie für alle möglichen Ränge aus Aufgabenteil (i) konkrete Beispiele von f und g an, sodass $g \circ f$ den vorgegebenen Rang hat.

Aufgabe 4:

Wir haben in der Vorlesung gesehen, dass die Multiplikation von Matrizen im Allgemeinen nicht kommutativ ist. Bestimmen Sie daher alle Matrizen $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mit $AB = BA$ für alle $B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

Lineare Algebra I, SoSe 24 Blatt 9

Fragenkatalog zu dem Abschnitt L16 (nicht abzugeben):

- Wie drückt man ein lineares Gleichungssystem durch Matrizen aus?
- Was ist die erweiterte Matrix eines linearen Gleichungssystems?
- Was ist der Spaltenrang einer Matrix?
- Was ist der Rang $\text{rg}(A)$ einer Matrix A ?
- Wie kann man den Spaltenrang einer Matrix bestimmen?
- Was ist der Zeilenrang einer Matrix?
- Wie kann man den Zeilenrang einer Matrix bestimmen?
- In welchem Zusammenhang stehen der Zeilen- und der Spaltenrang einer Matrix?
- Wie kann man die Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems über den Rang ausdrücken?
- Was ist die Struktur der Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems?
- Wie kann man die Invertierbarkeit einer Matrix charakterisieren?
- Wie kann man den Rang einer Matrix explizit bestimmen?
- Wie kann man ein lineares Gleichungssystem explizit lösen?
- Was ist eine Zeilenstufenform einer Matrix?
- Was ist eine reduzierte Zeilenstufenform einer Matrix?
- Wie funktioniert der Gauß-Algorithmus?
- Wie bestimmt man das Inverse A^{-1} einer invertierbaren Matrix A ?
- Welche Rechenregeln bzgl. Inversen von Matrizen gibt es?
- Können Sie für alle obigen Begriffe konkrete Beispiele/Gegenbeispiele angeben?

Lineare Algebra I, SoSe 24

Blatt 9

Einige generelle Tipps zur Bearbeitung von Übungsblättern:

- Beginnen Sie möglichst früh damit, sich mit den Aufgaben auseinanderzusetzen
- Machen Sie sich die exakte Bedeutung der verwendeten Begriffe und Definitionen durch Nachschlagen im Skript bewusst
- Manche Aufgaben können Sie (vermutlich) nur unter Zuhilfenahme von Resultaten aus der Vorlesung lösen, sodass Sie stets im Blick haben sollten, was Sie denn bereits über gegebene Objekte wissen
- Selbst wenn Sie eine Definition oder eine Aussage kennen, hilft es, sich diese mit Beispielen zu veranschaulichen
- Manche Aussagen lassen sich leichter per Widerspruchsbeweis oder per Kontraposition zeigen; versuchen Sie also ruhig verschiedene Ansätze
- Lassen Sie sich nicht zu sehr frustrieren, wenn Sie nicht alles auf Anhieb lösen können
- Sprechen Sie mit Anderen über die Aufgaben (sowohl Kommilitonen, Korrektor*innen als auch Übungsgruppenleiter*innen bieten sich dort zum Beispiel an)
- Suchen Sie nicht nach (vollständigen) Lösungen online (oder in Büchern etc.), da dies nur Ihr eigenes Verständnis bremst (auch das Versuchen und Scheitern an Problemen ist lehrreich, selbst wenn es erstmal nicht so scheint)
- Begründen Sie Ihre Antworten, außer wenn explizit dabei steht, dass Sie es nicht tun müssen
- Schreiben Sie Ihre Lösungen möglichst nicht als eine reine Folge von Symbolen auf, sondern verwenden Sie auch vollständige (deutsche oder englische) Sätze um Ihre Gedanken zu erklären